

Probabilidade Condicional e Binomial

Objetivos

Compreender o conceito de probabilidade condicional e seu cálculo. Compreender a aplicação da Análise Combinatória no cálculo da probabilidade binomial.

Se liga

Para entender melhor este conteúdo, é muito importante saber os conceitos de probabilidade e de análise combinatória. Separamos [aqui](#) um resumo sobre probabilidade e [aqui](#) uma aulinha sobre análise combinatória para você revisar! Caso não seja direcionado pelo último link, procure na biblioteca pela aula "Análise Combinatória".

Curiosidade

Você gosta de biologia? Pessoas que gostam de matemática costumam gostar muito de genética em biologia. Isso se deve ao fato de a genética lidar muito com probabilidade. [Clique aqui](#) para conferir um artigo super legal relacionando às duas disciplinas!

Teoria

Probabilidade condicional

Seja Ω um espaço amostral, e consideremos dois eventos A e B . Com o símbolo $P(A|B)$, indicamos a probabilidade do evento A , dado que o evento B ocorreu, isto é, $P(A|B)$ é a *probabilidade condicional* do evento A , uma vez que B tenha ocorrido. Quando calculamos $P(A|B)$, tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral "reduzido" dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A .

A probabilidade condicional é denotada como $P(A/B)$. A fórmula é: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemplo:

1. Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um ás vermelho, sabendo que ela é de copas?

Total de cartas = 52

A : sair às vermelho = 2

B : sair copas = 13

$A \cap B$: ás de copas = 1

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{52} \cdot \frac{52}{13} = \frac{1}{13}$$

Probabilidade binomial

Também chamada de distribuição binomial, é a probabilidade com as seguintes características:

- Todos os eventos têm como resultado duas possibilidades: Sucesso ou Fracasso. (estudamos como a probabilidade de acerto e seu complementar)
- Os eventos são independentes

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ onde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Exemplo:

1. Um dado é jogado 7 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 5 quatro vezes?

p: Probabilidade de sair o 5 em cada jogada = $\frac{1}{6}$

q: Probabilidade de não sair o 5 em cada jogada = $\frac{5}{6}$ (porque é o complementar de A)

n: número total de lançamentos = 7

k: número de vezes que se quer que aconteça = 4

$$\binom{7}{4} p^4 q^{7-4} = \binom{7}{4} p^4 q^3 = \binom{7}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{1}{6^4} \cdot \frac{5^3}{6^3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{1296} \cdot \frac{125}{216} = \frac{35}{279936}$$

Mapa mental sobre probabilidade



Exercícios de fixação

1. Calcule a probabilidade de obter soma 8 no lançamento de dois dados em que o resultado do lançamento foi dois números ímpares.
2. Qual é a probabilidade de extrair uma carta de um baralho comum de 52 cartas e obter um Ás, sabendo que ela é uma carta de copas?
3. Sejam cartões numerados de 1 a 10 em uma urna e misturadas. Retiramos um cartão. Se o número do cartão é no mínimo 5, qual a probabilidade que ele seja o número 10?
4. Em uma escola com 250 alunos, 100 são homens(H) e 150 são mulheres(M). Dentre esses alunos 110 cursam física (F), sendo 40 homens e 70 mulheres. 140 cursam química (Q) sendo 60 homens e 80 mulheres. Um aluno é sorteado do acaso. Qual é a probabilidade de que esteja cursando química dado que é mulher?
5. Numa dada cidade, tem-se a seguinte situação:

	Empregados	Desempregados	Total
Homens	460	40	500
Mulheres	140	260	400
Total	600	300	900

Qual é a probabilidade de um homem ser escolhido, dado que está empregado?

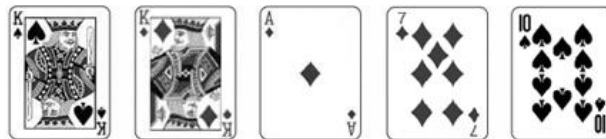
Exercícios de vestibulares



1. Carlos sabe que Ana e Beatriz estão viajando pela Europa. Com as informações que dispõe, ele estima corretamente que a probabilidade de Ana estar hoje em Paris é $\frac{3}{7}$, que a probabilidade de Beatriz estar hoje em Paris é $\frac{2}{7}$, e que a probabilidade de ambas, Ana e Beatriz, estarem hoje em Paris é $\frac{1}{7}$. Carlos então recebe um telefonema de Ana, informando que ela está hoje em Paris. Com a informação recebida pelo telefonema de Ana, Carlos agora estima corretamente que a probabilidade de Beatriz também estar hoje em Paris é igual a:

- a) $\frac{1}{7}$.
- b) $\frac{1}{3}$.
- c) $\frac{2}{3}$.
- d) $\frac{5}{7}$.
- e) $\frac{4}{7}$.

2. Cinco cartas de um baralho estão sobre uma mesa; duas delas são Reis, como indicam as imagens.



Após serem viradas para baixo e embaralhadas, uma pessoa retira uma dessas cartas ao acaso e, em seguida, retira outra. A probabilidade de sair Rei apenas na segunda retirada equivale a:

- a) $\frac{1}{2}$.
- b) $\frac{1}{3}$.
- c) $\frac{2}{5}$.
- d) $\frac{3}{10}$.
- e) $\frac{7}{10}$.

3. Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala. Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

- a) $\frac{1}{3}$.
- b) $\frac{1}{18}$.
- c) $\frac{1}{40}$.
- d) $\frac{1}{54}$.
- e) $\frac{1}{18}$.

4. Em um pote de vidro não transparente, foram colocados mini sabonetes, todos de mesmo tamanho, sendo 16 deles na cor amarela, 6 na cor verde e 4 na cor azul. Retirando-se aleatoriamente 3 desses mini sabonetes, um após o outro, sem reposição, a probabilidade de saírem pelo menos 2 deles na cor amarela, sabendo que o primeiro mini sabonete retirado era na cor amarela, é :
- 11/20.
 - 13/20.
 - 15/20.
 - 17/20.
 - 19/20.



5. O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% deles eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%. Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a
- 10.
 - 15.
 - 35.
 - 40.
 - 45.
6. Um bairro residencial tem cinco mil moradores, dos quais mil são classificados como vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, enquanto que, entre os não vegetarianos, essa porcentagem cai para 20%. Uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, é esportista. A probabilidade de ela ser vegetariana é:
- 2/25.
 - 1/5.
 - 1/4.
 - 1/3.
 - 5/6.
7. O gerente de uma empresa sabe que 70% de seus funcionários são do sexo masculino e foi informado de que a porcentagem de empregados fumantes nessa empresa é de 5% dos homens e de 5 % das mulheres. Selecionando, ao acaso, a ficha de cadastro de um dos funcionários, verificou tratar-se de um fumante. Qual a probabilidade de esse funcionário ser do sexo feminino?
- 50,0%
 - 30,0%
 - 16,7%
 - 5,0%
 - 1,5%

8. Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos. Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?
- $1/16$.
 - $3/16$.
 - $1/4$.
 - $3/8$.
 - $1/2$.
9. A probabilidade de um casal ter um filho de olhos azuis é igual a $\frac{1}{3}$. Se o casal pretende ter 4 filhos, a probabilidade de que no máximo dois tenham olhos azuis é:
- $1/9$.
 - $7/9$.
 - $8/9$.
 - $2/3$.
 - $1/2$.
10. Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?
- $1/2$.
 - $5/8$.
 - $1/4$.
 - $5/6$.
 - $5/14$.

Se liga!

Sua específica é exatas e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique [aqui](#) para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. Seja A = (obter soma 8) e B = (obter dois números ímpares).

$P(A \cap B)$ é a probabilidade de se obter apenas números ímpares que somam 8 no lançamento de dois dados. As únicas combinações, das 36 possíveis, são: $\{3,5\}$ e $\{5,3\}$.

$$\text{Portanto, } P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

Já $P(B)$ é a probabilidade de se obter somente números ímpares no lançamento de dois dados. As únicas combinações, dentro das 36 possíveis, são: $\{1,1\}$; $\{1,3\}$; $\{1,5\}$; $\{3,1\}$; $\{3,3\}$; $\{3,5\}$; $\{5,1\}$; $\{5,3\}$ e $\{5,5\}$

$$\text{Logo, } P(B) = \frac{9}{36}$$

Utilizando a fórmula para probabilidade condicional, teremos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{2}{9}$$

2. A = Obter um Ás

B = Obter uma carta de copas

Como só existe um ás de copas no baralho,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

A probabilidade de se obter uma carta de copas é:

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

Então, a probabilidade de se obter um ás de copas é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$

3. $A \cap B$ = Ser no mínimo 5 e ser igual a 10 $\rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

B = ser igual a 10 $\rightarrow P(B) = 1$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

4. B = ser mulher $\rightarrow P(B) = \frac{150}{250}$

$A \cap B$ = ser mulher e cursar química $\rightarrow P(A \cap B) = \frac{80}{250}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150} = 0,53 = 53\%$$

5. $B = \text{o escolhido está empregado} \rightarrow P(B) = \frac{600}{900}$

$A \cap B = \text{o escolhido é homem e está empregado} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{460}{900}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{460}{900}}{\frac{600}{900}} = \frac{460}{600} = 0,767 = 76,7\%$$

Exercícios de vestibulares

1. **B**

$$P(\text{Ana estar hoje em Paris}) = 3/7$$

$$P(\text{Beatriz estar hoje em Paris}) = 2/7$$

$$P(\text{Ana e Beatriz estarem hoje em Paris}) = 1/7$$

Sabendo que $P(B|A)$ é a probabilidade de Beatriz estar em Paris, sabendo que Ana está em Paris, podemos usar o conceito da probabilidade condicional:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

2. **D**

A probabilidade de não sair um rei na primeira retirada é de $3/5$, e a de sair na segunda retirada é de $2/4$.

Portanto a probabilidade pedida é calculada por $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

3. **D**

A probabilidade de a aluna ser sorteada, dado que ela está na sala C, é igual a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{54}$

4. **D**

A probabilidade de não ser retirado nenhum sabonete na cor amarela nas duas últimas extrações, dado que um sabonete amarelo foi retirado na primeira extração, é igual a: $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20}$.

O resultado será: $1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

5. **D**

Se $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ das vinte perguntas inicialmente depositadas na urna são de nível fácil, e x é o número de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar, então

$$\frac{5+x}{20+x} = \frac{3}{4} \leftrightarrow x = 40.$$

6. **D**

Se o bairro tem cinco mil moradores dos quais mil são vegetarianos, então pode-se deduzir que quatro mil não são vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, ou seja, 400 moradores ($1000 \cdot 40\% = 400$). Entre os não vegetarianos, 20% são esportistas, ou seja, 800 moradores ($4000 \cdot 20\% = 800$). Logo, conclui-se que o bairro possui 1200 esportistas (400+800). Se uma pessoa escolhida ao acaso é esportista, a probabilidade de esta ser vegetariana será:

$$P(veg) = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$$

7. **B**

Se 70% dos funcionários são do sexo masculino, então $100\% - 70\% = 30\%$ são do sexo feminino. Portanto, a probabilidade condicional pedida é igual a

$$\frac{0,3 \cdot 0,05}{0,3 \cdot 0,05 + 0,7 \cdot 0,05} = 0,3 = 30\%$$

8. **D**

A probabilidade de nascer um menino é $\frac{1}{2}$, e a probabilidade de nascer uma menina também é $\frac{1}{2}$. Desse modo, pelo Teorema Binomial, segue que a resposta é

$$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

9. **C**

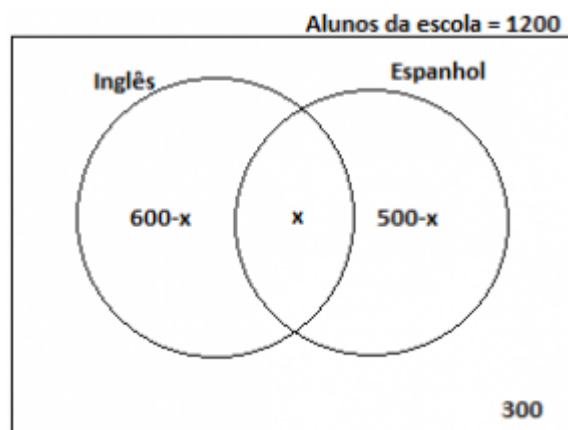
Probabilidade de o casal não ter filhos com os olhos azuis: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

Probabilidade de o casal ter apenas um filho com os olhos azuis: $\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$

Probabilidade de o casal ter exatamente dois filhos com os olhos azuis: $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$

Assim, a probabilidade pedida será: $P = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} + \frac{24}{81} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$.

10. A



A partir do Diagrama de Venn montado, temos:

$$(600 - x) + x + (500 - x) + 300 = 1200$$

$$-x = 1200 - 600 - 500 - 300$$

$$x = 200$$

Assim, os alunos que não falam inglês somam: $500 - 200 + 300 = 300 + 300 = 600$

A probabilidade de um aluno que não fala inglês falar espanhol é: $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$