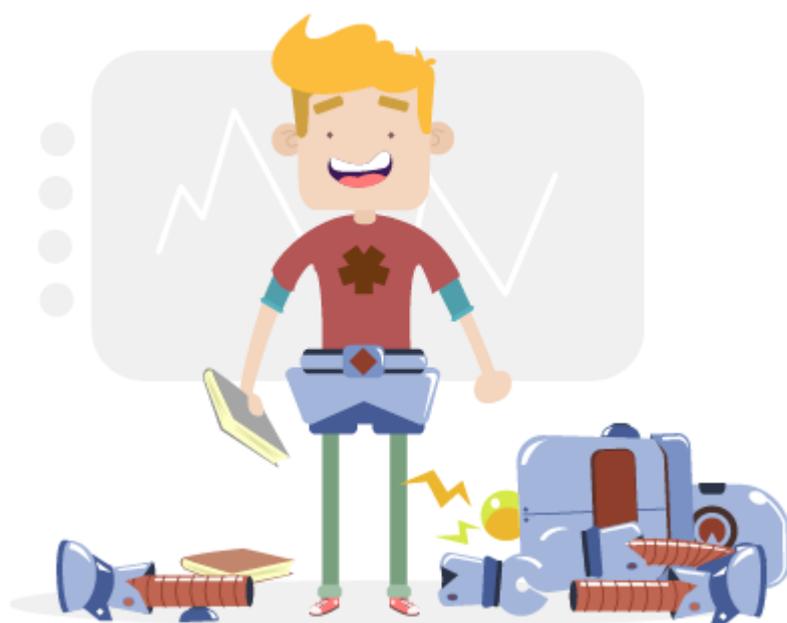


# EXATAS PARA TODOS

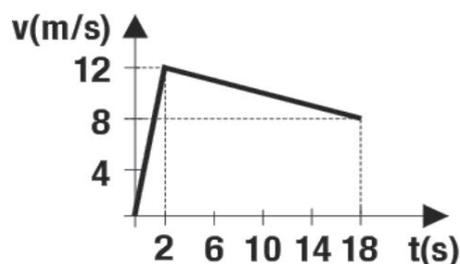
Todo mundo pode aprender Exatas!



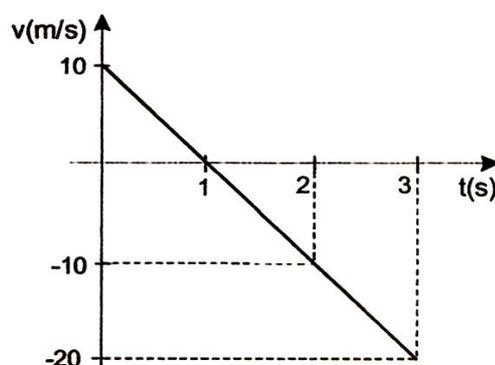
[Lista de Exercícios >](#)

## Prova Específica 6

1. (UFRJ 2001 – Específica) Nas provas de atletismo de curta distância (até 200m) observa-se um aumento muito rápido da velocidade nos primeiros segundos de prova e depois de um intervalo relativamente longo em que a velocidade do atleta permanece praticamente constante para em seguida diminuir lentamente. Para simplificar a discussão suponha que a velocidade do velocista em função do tempo seja dada pelo gráfico a seguir. Calcule:

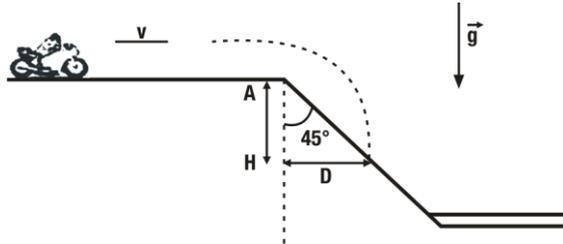


- a) as acelerações, nos dois primeiros segundos da prova e no movimento subsequente;  
b) a velocidade média nos primeiros 10 segundos de prova.
2. (UFRJ 2004 – Específica) De um ponto localizado a uma altura  $h$  do solo, lança-se uma pedra verticalmente para cima. A figura abaixo representa, em gráfico cartesiano, como a velocidade escalar da pedra varia, em função do tempo, entre o instante de lançamento ( $t = 0$ ) e o instante em que chega ao solo ( $t = 3s$ ).



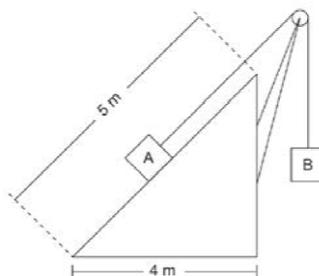
- a) Em que instante a pedra retorna ao ponto de partida? Justifique sua resposta.  
b) Calcule de que altura  $h$  a pedra foi lançada.

3. Um motociclista de motocross move-se com velocidade  $v=10\text{m/s}$ , sobre uma superfície plana, até atingir uma rampa (em A), inclinada de  $45^\circ$  com a horizontal, como indicado na figura.



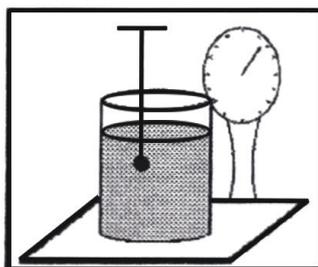
Calcule a distância horizontal D que o motociclista deverá atingir novamente a

4. Uma esfera é lançada com velocidade de  $50\text{m/s}$  sob um ângulo que forma  $37^\circ$  com a horizontal. Dado:  $\sin 37^\circ=0,6$ ;  $\cos 37^\circ=0,8$ ;  $g=10\text{m/s}^2$ .
- as componentes horizontal e vertical da velocidade;
  - a velocidade do corpo na altura máxima;
  - o tempo de subida;
  - o tempo de voo considerando que o corpo retorna à altura do lançamento;
  - o alcance do movimento;
  - a altura máxima atingida.
5. O sistema representado na figura a seguir é abandonado em repouso. Os blocos A e B têm a mesma massa m.



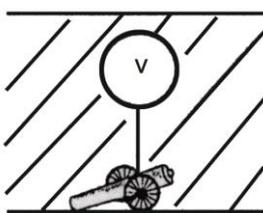
Os fios e a roldana são ideais. Considerando as distâncias indicadas na figura, calcule o mínimo coeficiente de atrito estático entre o bloco A e o plano inclinado para que o sistema permaneça em repouso.

6. (UFRJ 2003 – Específica) Um aluno, primeiramente, colocou água em um recipiente e o posicionou sobre uma balança, obtendo uma leitura  $m_0$  em gramas. Depois imergiu na água uma bola de acrílico com massa igual a 600 g e volume  $400 \text{ cm}^3$ , presa por um fio ao teto. Considere a densidade da água igual a  $1000 \text{ kg/m}^3$  e a aceleração da gravidade  $10 \text{ m/s}^2$ .



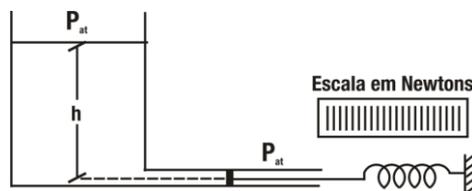
Calcule:

- a) a tensão no fio;  
b) a variação em gramas da medida da balança devido à introdução da bola de acrílico na água.
7. (UFRJ – Específica) Deseja-se içar uma peça metálica de artilharia de massa  $m=1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$  e volume igual a  $2,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$ , que se encontra em repouso no fundo de um lago. Para tanto, prende-se a peça a um balão que é inflado com ar até atingir um volume  $V$ , como mostra a figura.



Supondo desprezível o peso do balão e do ar em seu interior e considerando a densidade da água  $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , calcule o valor do volume mínimo  $V$  necessário para içar a peça.

8. (UFRJ 2005 – Específica) Um líquido de densidade  $1,25 \text{ g/cm}^3$  está em repouso dentro de um recipiente. No fundo do recipiente existe uma conexão com um tubo cilíndrico de  $2,0 \text{ cm}$  de diâmetro. O tubo possui um êmbolo cuja parte exterior está sob a ação da atmosfera e em contato com uma mola. Considere que não haja atrito entre o êmbolo e o tubo cilíndrico.

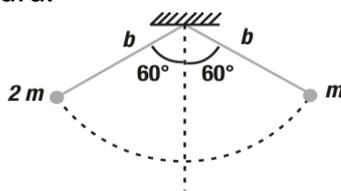


Num determinado experimento, a força da mola sobre o êmbolo tem módulo igual a 6,28N.

Calcule a altura  $h$  do líquido indicada na figura.

Use  $\pi = 3,14$ .

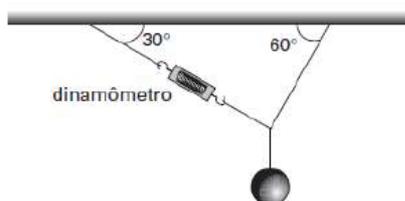
9. (UFRJ – Específica) Dois pêndulos com fios ideais de mesmo comprimento  $b$  estão suspensos em um mesmo ponto do teto. Nas extremidades livres do fio, estão presas duas bolinhas de massa  $2m$  e  $m$  e dimensões desprezíveis. Os fios estão esticados em um mesmo plano vertical, separados e fazendo, ambos um ângulo de  $60^\circ$  com a direção vertical, conforme indica a figura.



Em um dado momento, as bolinhas são soltas, descem a partir do repouso, e colidem no ponto mais baixo de suas trajetórias, onde se grudam instantaneamente, formando um corpúsculo de massa  $3m$ .

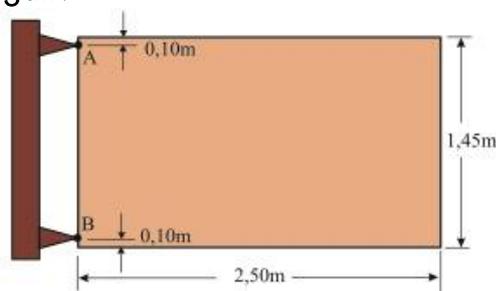
- Calcule o módulo da velocidade do corpúsculo imediatamente após a colisão em função de  $b$  e do módulo  $g$  da aceleração da gravidade.
- Calcule o ângulo  $\theta$  que o fio faz com a vertical no momento em que o corpúsculo atinge sua altura máxima.

10. Um professor de física pendurou uma pequena esfera, pelo seu centro de gravidade, ao teto da sala de aula, conforme ao lado:



Em um dos fios que sustentava a esfera ele acoplou um dinamômetro e verificou que, com o sistema em equilíbrio, ele marcava 10N. Calcule o peso, em newtons, da esfera pendurada.

11. (UFRJ – Específica) Um portão retangular de massa igual a 50kg tem 2,50m de comprimento, 1,45m de altura e está preso a duas dobradiças A e B. O vértice da dobradiça A dista 0,10m do topo do portão, e o vértice da dobradiça B, 0,10m da base, como indica a figura a seguir.



Suponha que o sistema esteja em repouso, que o peso do portão esteja aplicado em seu centro geométrico e que a aceleração  $g$  da gravidade local seja  $10\text{m/s}^2$ .

- Calcule o módulo da força resultante exercida pelas duas dobradiças sobre o portão.
- Calcule o módulo da componente horizontal da força exercida pela dobradiça A sobre o portão e determine seu sentido.

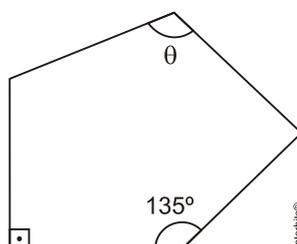
## Gabarito

1. a)  $6 \text{ m/s}^2$ ;  $-0,25 \text{ m/s}^2$   
b)  $10 \text{ m/s}$
2. a)  $2\text{s}$   
b)  $15\text{m}$
3.  $20\text{m}$
4. a)  $V_{ox}=40\text{m/s}$  e  $V_{oy}=30\text{m/s}$   
b)  $40\text{m/s}$   
c)  $3\text{s}$   
d)  $6\text{s}$   
e)  $240\text{m}$   
f)  $45\text{m}$
5.  $0,5$
6. a)  $2\text{N}$   
b)  $400 \text{ g}$
7.  $0,8 \text{ m}^3$
8.  $1,6\text{m}$
9. a)  $\frac{\sqrt{gb}}{3}$   
b)  $\arccos \frac{17}{18}$
10.  $17\text{N}$
11. a)  $500\text{N}$   
b)  $500\text{N}$

## Prova Específica 4

1. (Unicamp 2015) Prazeres, benefícios, malefícios, lucros cercam o mundo dos refrigerantes. Recentemente, um grande fabricante nacional anunciou que havia reduzido em 13 mil toneladas o uso de açúcar na fabricação de seus refrigerantes, mas não informou em quanto tempo isso ocorreu. O rótulo atual de um de seus refrigerantes informa que 200 ml do produto contêm 21 g de açúcar. Utilizando apenas o açúcar “economizado” pelo referido fabricante seria possível fabricar, aproximadamente,
- 124 milhões de litros de refrigerante.
  - 2,60 bilhões de litros de refrigerante.
  - 1.365 milhões de litros de refrigerante.
  - 273 milhões de litros de refrigerante.

2. (Unicamp 2015) A figura a seguir exibe um pentágono com todos os lados de mesmo comprimento.



A medida do ângulo  $\theta$  é igual a

- $105^\circ$ .
  - $120^\circ$ .
  - $135^\circ$ .
  - $150^\circ$ .
3. (Unicamp 2015) Uma compra no valor de 1.000 reais será paga com uma entrada de 600 reais e uma mensalidade de 420 reais. A taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a
- 2%.
  - 5%.
  - 8%.
  - 10%.

4. (Unicamp 2015) A tabela abaixo informa alguns valores nutricionais para a mesma quantidade de dois alimentos, A e B.

Alimento	A	B
Quantidade	20 g	20 g
Valor Energético	60 kcal	80 kcal
Sódio	10 mg	20 mg
Proteína	6 g	1 g

Considere duas porções isocalóricas (de mesmo valor energético) dos alimentos A e B. A razão entre a quantidade de proteína em A e a quantidade de proteína em B é igual a

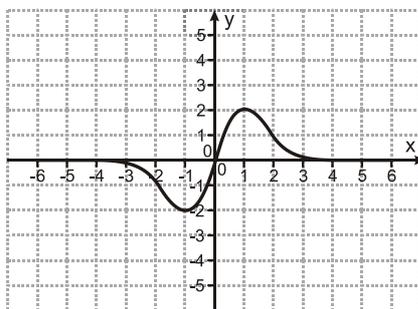
- a) 4.  
b) 6.  
c) 8.  
d) 10.
5. (Unicamp 2015) Considere o polinômio  $p(x) = x^3 - x^2 + ax - a$ , onde  $a$  é um número real. Se  $x = 1$  é a única raiz real de  $p(x)$ , então podemos afirmar que
- a)  $a < 0$ .  
b)  $a < 1$ .  
c)  $a > 0$ .  
d)  $a > 1$ .
6. (Unicamp 2015) Sejam  $x$  e  $y$  números reais tais que  $x + yi = \sqrt{3 + 4i}$ , onde  $i$  é a unidade imaginária. O valor de  $xy$  é igual a
- a)  $-2$ .  
b)  $-1$ .  
c)  $1$ .  
d)  $2$ .
7. (Unicamp 2015) Se  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{13})$  é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é 78, então  $\alpha_7$  é igual a

- a) 6.
- b) 7.
- c) 8.
- d) 9.

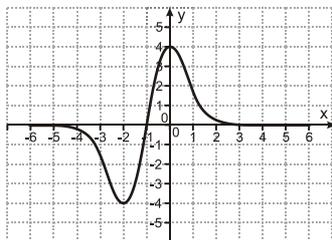
8. (Unicamp 2015) Seja  $a$  um número real. Considere as parábolas de equações cartesianas  $y = x^2 + 2x + 2$  e  $y = 2x^2 + ax + 3$ . Essas parábolas não se interceptam se e somente se

- a)  $|a| = 2$ .
- b)  $|a| < 2$ .
- c)  $|a - 2| < 2$ .
- d)  $|a - 2| \geq 2$ .

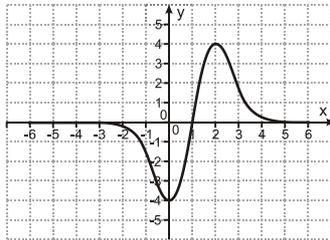
9. (Unicamp 2015) A figura abaixo exibe o gráfico de uma função  $y = f(x)$ .



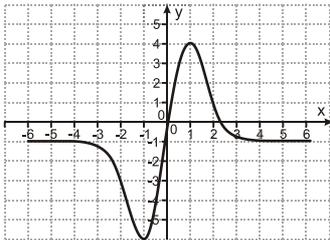
Então, o gráfico de  $y = 2f(x - 1)$  é dado por



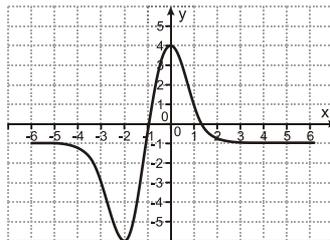
a)



b)



c)



d)

10. (Unicamp 2015) Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais. Se  $A^2 = A$

e  $A$  é invertível, então

- a)  $a = 1$  e  $b = 1$ .
- b)  $a = 1$  e  $b = 0$ .
- c)  $a = 0$  e  $b = 0$ .
- d)  $a = 0$  e  $b = 1$ .

11. (Unicamp 2015) Considere o sistema linear nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 7x + 8y - mz = 26, \end{cases}$$

onde  $m$  é um número real. Sejam  $a < b < c$  números inteiros consecutivos tais que  $(x, y, z) = (a, b, c)$  é uma solução desse sistema. O valor de  $m$  é igual a

- a) 3.
- b) 2.
- c) 1.

d) 0.

**12.** (Unicamp 2015) O número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana é igual a

- a) 21.
- b) 20.
- c) 15.
- d) 14.

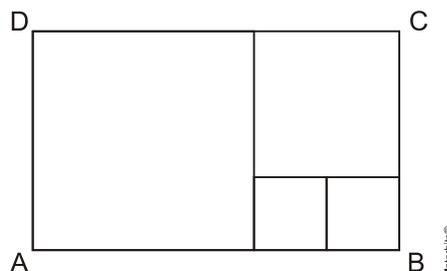
**13.** (Unicamp 2015) Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a  $R$ , tem a mesma área de superfície total que uma esfera de raio

- a)  $2R$ .
- b)  $\sqrt{3}R$ .
- c)  $\sqrt{2}R$ .
- d)  $R$ .

**14.** (Unicamp 2015) No plano cartesiano, a equação  $|x - y| = |x + y|$  representa

- a) um ponto.
- b) uma reta.
- c) um par de retas paralelas.
- d) um par de retas concorrentes.

**15.** (Unicamp 2015) A figura abaixo exibe um retângulo  $ABCD$  decomposto em quatro quadrados.



O valor da razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  é igual a

- a)  $\frac{5}{3}$ .
- b)  $\frac{5}{2}$ .
- c)  $\frac{4}{3}$ .
- d)  $\frac{3}{2}$ .

## Gabarito

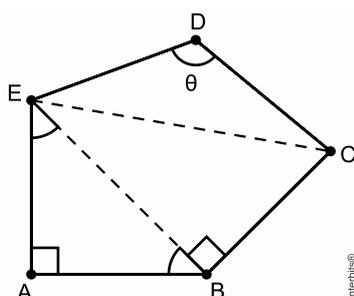
1. A

Como  $13 \cdot 10^3 \text{ ton} = 13 \cdot 10^9 \text{ g}$  e  $200 \text{ mL} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ L}$ , segue que o resultado pedido é igual a

$$\frac{13 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{21} \cong 124 \cdot 10^6 \text{ L.}$$

2. B

Considere o pentágono equilátero ABCDE de lado  $\ell$  da figura.



É fácil ver que o triângulo CDE é isósceles, com  $\overline{CD} = \overline{ED}$ .

Sabendo que  $\angle BAE = 90^\circ$ , tem-se que o triângulo ABE é retângulo isósceles, com  $\overline{BE} = \ell\sqrt{2}$ . Em consequência, sendo  $\angle ABC = 135^\circ$ , concluímos que o triângulo ABC é retângulo em B.

Agora, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo BCE, encontramos  $\overline{CE} = \ell\sqrt{3}$ .

Finalmente, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo CDE, vem

$$\begin{aligned} (\ell\sqrt{3})^2 &= \ell^2 + \ell^2 - 2 \cdot \ell \cdot \ell \cdot \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \theta = 120^\circ. \end{aligned}$$

3. B

O saldo devedor após o pagamento da entrada é igual  $1000 - 600 = \text{R\$ } 400,00$ . Portanto, a taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a  $\frac{420 - 400}{400} \cdot 100\% = 5\%$ .

**4. C**

Sabemos que a massa de proteína é proporcional à quantidade do alimento. Logo, tomando 20 g do alimento B, a quantidade do alimento A para que as porções sejam isocalóricas é igual a  $\frac{80 \cdot 20}{60} = \frac{80}{3}$  g. Desse modo, a massa de proteína presente nessa porção do alimento A é  $\frac{80 \cdot 6}{3 \cdot 20} = 8$  g e, portanto, segue que o resultado pedido é  $\frac{8}{1} = 8$ .

**5. C**

Reescrevendo  $p(x)$  sob a forma  $p(x) = (x^2 + a) \cdot (x - 1)$ , e sabendo que  $x = 1$  é a única raiz real de  $p(x)$ , deve-se ter  $a > 0$ .

**6. D**

Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, vem

$$(x + yi)^2 = (\sqrt{3 + 4i})^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 3 + 4i.$$

Portanto, temos  $2xy = 4$  se, e somente se,  $xy = 2$ .

**7. A**

Como  $\alpha_7$  é o termo médio da progressão aritmética, segue-se que  $78 = \alpha_7 \cdot 13$  e, portanto, temos  $\alpha_7 = 6$ .

**8. C**

Tem-se que

$$2x^2 + ax + 3 = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 + (a - 2)x + 1 = 0.$$

Logo, as parábolas não se intersectam se, e somente se, o discriminante da equação acima for negativo, isto é, se

$$(a - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \Leftrightarrow (a - 2)^2 < 4 \\ \Leftrightarrow |a - 2| < 2.$$

**9. B**

Supondo  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $g(x) = f(x-1)$  e  $h = 2g(x)$ , segue-se que o gráfico de  $g$  é obtido a partir do gráfico de  $f$ , mediante uma translação horizontal de uma unidade no sentido positivo do eixo das abscissas. Além disso, o gráfico de  $h$  é obtido por meio de uma dilatação vertical do gráfico de  $g$  por um fator igual a 2. Portanto, o gráfico da função  $h$  é o da alternativa [B].

10. B

Sabendo que  $A \cdot I_2 = A$  e  $A \cdot A^{-1} = I_2$ , com  $I_2$  sendo a matriz identidade de segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} A^2 = A &\Leftrightarrow A \cdot A = A \\ &\Leftrightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \\ &\Leftrightarrow A \cdot I_2 = I_2 \\ &\Leftrightarrow A = I_2. \end{aligned}$$

Por conseguinte, segue que  $a = 1$  e  $b = 0$ .

11. A

Sendo  $a < b < c$  números inteiros consecutivos, temos  $b = a + 1$  e  $c = a + 2$ . Em consequência, da primeira equação do sistema, vem

$$a + 2 \cdot (a + 1) + 3 \cdot (a + 2) = 20 \Leftrightarrow a = 2.$$

Assim, encontramos  $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  e, portanto, temos  $7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - m \cdot 4 = 26$ , implicando em  $m = 3$ .

12. C

Como a semana tem 7 dias, para garantir que há pelo menos três pessoas no mesmo dia da semana, é necessário que haja pelo menos  $2 \cdot 7 + 1 = 15$  pessoas no grupo.

13. D

Seja  $r$  o raio da esfera. Tem-se que

$$4\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot R \cdot (R + r) \Leftrightarrow r = R.$$

14. D

Supondo que  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos

$$|x-y|=|x+y| \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=x+y \\ \text{ou} \\ x-y=-x-y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \square \text{ e } y=0 \\ \text{ou} \\ x=0 \text{ e } y \in \square \end{cases},$$

ou seja, a equação representa os eixos cartesianos, cuja interseção é a origem.

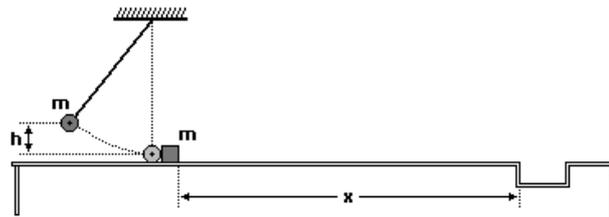
**15. A**

Há três tipos de quadrados, com  $l_1 < l_2 < l_3$  sendo os seus lados. É fácil ver que  $l_2 = 2 \cdot l_1$  e

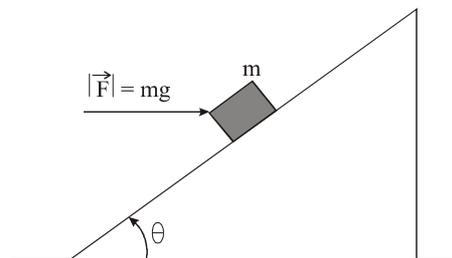
$$l_3 = l_1 + l_2 = 3 \cdot l_1. \text{ Portanto, temos } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{l_3 + l_2}{l_3} = \frac{5}{3}.$$

## Prova Específica 7

1. (UFF 2004 – 2ª Fase) No brinquedo ilustrado na figura, o bloco de massa  $m$  encontra-se em repouso sobre uma superfície horizontal e deve ser impulsionado para tentar atingir a caçapa, situada a uma distância  $x=1,5\text{m}$  do bloco. Para impulsioná-lo, utiliza-se um pêndulo de mesma massa  $m$ . O pêndulo é abandonado de uma altura  $h=20\text{cm}$  em relação a sua posição de equilíbrio e colide elasticamente com o bloco no instante em que passa pela posição vertical. Considerando a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcule:



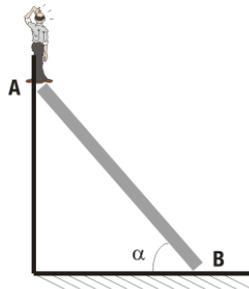
- a) a velocidade da massa  $m$  do pêndulo imediatamente antes da colisão;  
b) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão;  
c) a distância percorrida pelo bloco, sobre a superfície horizontal, supondo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e essa superfície seja  $\mu = 0,20$  e verifique se o bloco atinge a caçapa.
2. (UFRJ – Específica) Um plano está inclinado, em relação à horizontal, de um ângulo  $\theta$  cujo seno é igual a  $0,6$  (o ângulo é menor do que  $45^\circ$ ). Um bloco de massa  $m$  sobe nesse plano inclinado sob a ação de uma força horizontal  $F$ , de módulo exatamente igual ao módulo de seu peso, como indica a figura a seguir.



- a) Supondo que não haja atrito entre o bloco e o plano inclinado, calcule o módulo da aceleração do bloco.

b) Calcule a razão entre o trabalho  $W_F$  da força  $F$  e o trabalho  $W_P$  do peso do bloco, ambos em um deslocamento no qual o bloco percorre uma distância  $d$  ao longo da rampa.

3. Uma escada AB de peso 200N está sobre um plano horizontal rugoso em B e encostada numa parede vertical lisa em A. O coeficiente de atrito em B é dado por  $\mu = \frac{7\sqrt{3}}{24}$



Qual é o mínimo valor do ângulo  $\alpha$  que permite um homem de 600N de peso subir até o topo da escada, sem que haja deslizamento?

4. (UNICAMP – 2ª Fase) Em um aquário de  $10\ell$ , completamente cheio d'água, encontra-se um pequeno aquecedor de 60W. Sabendo-se que em 25 minutos a temperatura da água aumentou de  $2^\circ\text{C}$ , pergunta-se:
- Que quantidade de energia foi absorvida pela água?
  - Que fração da energia fornecida pelo aquecedor foi perdida para o exterior?
- Dados: calor específico da água =  $1\text{cal/g}^\circ\text{C}$ ;  $1\text{cal}=4,0\text{ J}$ .

5. Considere 4 moles de um gás ideal, inicialmente a  $2^\circ\text{C}$  de temperatura e  $8,20\text{atm}$  de pressão, que se submete ao seguinte ciclo de transformações:
- compressão isotérmica, cedendo  $860\text{J}$  de calor, até o volume de  $10\text{L}$ ;
  - aquecimento isobárico até a temperatura de  $57^\circ\text{C}$ ;
  - despressurização isovolumétrica até a pressão de  $8,20\text{atm}$ ;
  - resfriamento isobárico até retornar às condições iniciais.
- Represente este ciclo, em um gráfico  $p$  (atm) x  $V$  (litros), indicando os valores de  $p$ ,  $V$  e  $T$  ao final de cada uma das transformações dadas acima.
  - Calcule o trabalho, em joules, realizado pelo gás no ciclo.

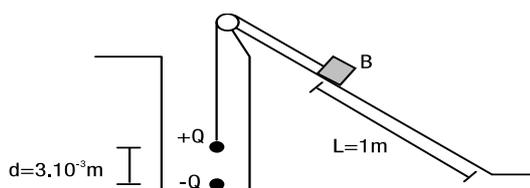
- c) Calcule o calor, em joules, absorvido pelo gás no ciclo.  
d) Calcule a potência, em watts, de um motor que realiza 10 destes ciclos por segundo.

Dados:

$$R=0,082\text{atm}\cdot\text{L}/\text{mol}\cdot\text{k};$$

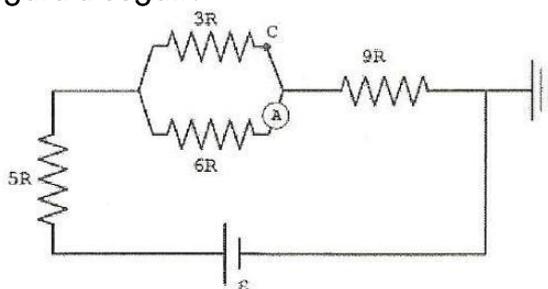
$$1\text{atm}=10^5\text{Pa}$$

6. Um pequeno bloco B de massa  $0,002\text{kg}$  é mantido em repouso no alto de uma rampa pela tração de um fio isolante elétrico, ligado a uma carga elétrica positiva  $Q$ , de massa desprezível, afastada  $3\cdot 10^{-3}\text{m}$  de uma carga negativa, de valor igual, fixada no fundo do poço (ver figura).



Calcule o valor das cargas sabendo que, se o fio for cortado, o bloco levará 2s para chegar ao fim da rampa, deslizando sem atrito (despreze a massa do fio). Dado:  $K_0=9\cdot 10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ .

7. [EFOMM] Observe a figura a seguir:



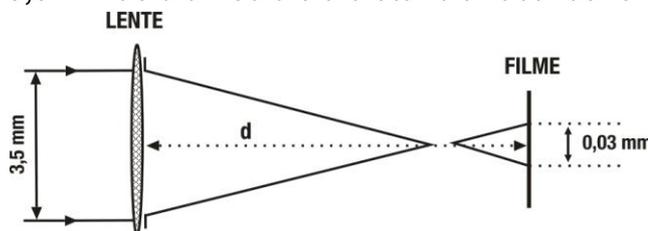
Considere o circuito acima, onde  $\varepsilon=48\text{V}$  e  $R=1,0\Omega$ . Suponha que o amperímetro A seja um aparelho ideal. Nestas condições, quais serão, respectivamente, o potencial elétrico, em volts, no ponto C e a leitura do amperímetro, em ampères?

8. (UFRJ) Dispõem-se de  $n$  resistores idênticos, todos de mesma resistência  $R$ , e de uma fonte de tensão capaz de manter em seus terminais uma diferença de potencial constante e igual a  $120\text{V}$ , sob quaisquer condições. Quando os resistores são ligados em

série com a fonte de tensão, a potência total por eles consumida é de 144W; quando são ligados em paralelo com a fonte de tensão, a potência total por eles consumida é de 3600W.

Calcule o número  $n$  de resistores utilizados e a resistência  $R$  de cada resistor.

9. (UERJ – 2ª Fase) Do lado externo da porta de um elevador existe, fixo, um espelho convexo que permite ao ascensorista acompanhar a movimentação de um passageiro de 1,6m de altura que se encontra a 3,0m do vértice do espelho. O raio de curvatura do espelho é igual a 4,0m. Com base nesses dados, calcule:
- a distância entre o passageiro e a sua imagem fornecida por esse espelho e
  - a altura da imagem do referido passageiro.
10. (UNICAMP 2002 – 2ª Fase) Em uma máquina fotográfica de foco fixo, a imagem de um ponto no infinito é formada antes do filme, conforme ilustra o esquema. No filme, esse ponto está ligeiramente desfocado e sua imagem tem 0,03mm de diâmetro. Mesmo assim, as cópias ampliadas ainda são nítidas para o olho humano. A abertura para a entrada de luz é de 3,5mm de diâmetro e a distância focal da lente é de 35mm.



- Calcule a distância  $d$  do filme à lente.
- A que distância da lente um objeto precisa estar para que sua imagem fique exatamente focalizada no filme?

**Gabarito**

1. a) 2m/s  
b) 2m/s  
c) 1m, portanto atinge a caçapa.

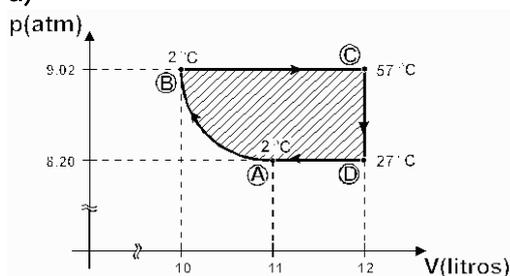
2. a)  $2\text{m/s}^2$   
b)  $-4/3$

1.

3.  $60^\circ$

4. a)  $2 \cdot 10^4\text{J}$   
b)  $1/9$

5. a)



- b) 124J

- c) 124J

- d) 1240W

6.  $1\text{nC}$

7. 27V e 1A

8. 5

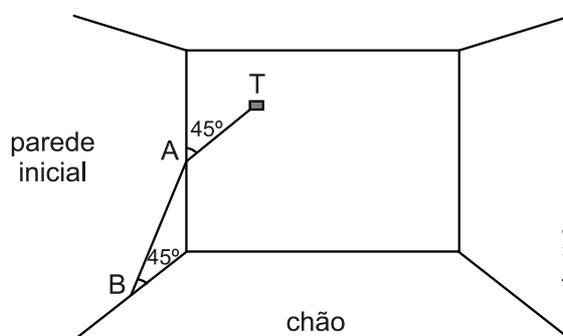
9. a) 4,2m  
b) 0,64m

10. a) 35,3mm  
b) aproximadamente 4m

## Prova Específica 5

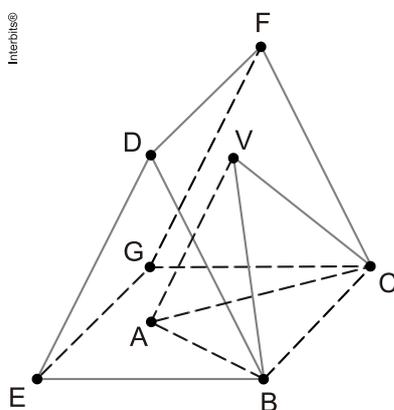
1. Uma sala tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Para levar fios a uma tomada T, um cano foi instalado tangente a duas paredes dessa sala. A primeira parte reta do cano, BA, faz um ângulo de  $45^\circ$  com o chão e a segunda parte, AT, congruente com a primeira, forma um ângulo de  $45^\circ$  com a parede inicial.

Observe a ilustração:



Desprezando a espessura do cano, calcule o ângulo  $B\hat{A}T$ , formado por suas duas partes.

2. Um artesão retirou, de uma pedra com a forma inicial de um prisma triangular reto de base EBD, um tetraedro regular VABC. Observe a figura abaixo:



Considere os seguintes dados:

- os vértices A e V pertencem a duas faces laterais do prisma;
- $\overline{BD} = \overline{BE} = \overline{BC} = 1$  m.

Determine o volume inicial da pedra.

**3.** Considere a equação:

$$(\log_2 x)^2 - \log_{\sqrt[3]{2}} x = 0, \text{ com } x > 0.$$

Um aluno apresentou o seguinte desenvolvimento para a solução dessa equação:

$$(\log_2 x)^2 = \log_{\sqrt[3]{2}} x$$

$$(\log_2 x)^2 = 3(\log_2 x)$$

$$(\log_2 x) = 3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

$$S = \{8\}.$$

O conjunto-solução encontrado pelo aluno está incompleto.

Resolva a equação e determine corretamente o seu conjunto-solução.

**4.** Considere a matriz  $A_{3 \times 3}$  abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada elemento desta matriz é expresso pela seguinte relação:

$$a_{ij} = 2 \times (\sin \theta_i) \times (\sin \theta_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Nessa relação, os arcos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  são positivos e menores que  $\frac{\pi}{3}$  radianos.

Calcule o valor numérico do determinante da matriz A.

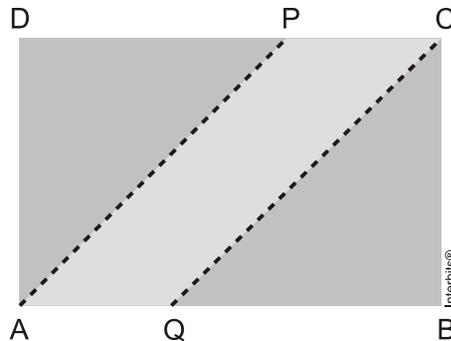
5. Um trem transportava, em um de seus vagões, um número inicial  $n$  de passageiros. Ao parar em uma estação, 20% desses passageiros desembarcaram. Em seguida, entraram nesse vagão 20% da quantidade de passageiros que nele permaneceu após o desembarque. Dessa forma, o número final de passageiros no vagão corresponde a 120. Determine o valor de  $n$ .
6. Um supermercado realiza uma promoção com o objetivo de diminuir o consumo de sacolas plásticas: o cliente que não utilizar as sacolas disponíveis no mercado terá um desconto de R\$ 0,03 a cada cinco itens registrados no caixa. Um participante dessa promoção comprou 215 itens e pagou R\$ 155,00. Determine o valor, em reais, que esse cliente pagaria se fizesse as mesmas compras e não participasse da promoção.
7. Duas empresas, A e B, farão doações mensais a uma creche. A tabela a seguir mostra os valores, em reais, dos depósitos iniciais, a serem realizados nos cinco primeiros meses de 2010.

Empresas	janeiro	fevereiro	março	abril	maio
A	12.000,00	11.400,00	10.800,00	10.200,00	9.600,00
B	300,00	600,00	900,00	1.200,00	1.500,00

A diferença entre os valores depositados pelas empresas entre dois meses subsequentes será mantida constante ao longo de um determinado período.

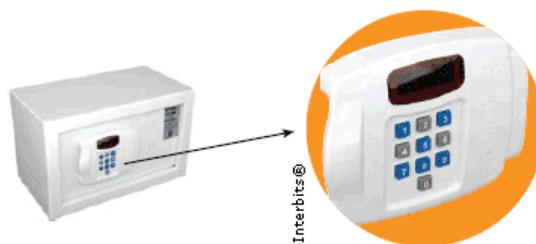
Determine o mês e o ano desse período em que o valor mensal do depósito da empresa A será igual ao da empresa B.

8. Um terreno retangular tem 800 m de perímetro e será dividido pelos segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{CQ}$  em três partes, como mostra a figura.



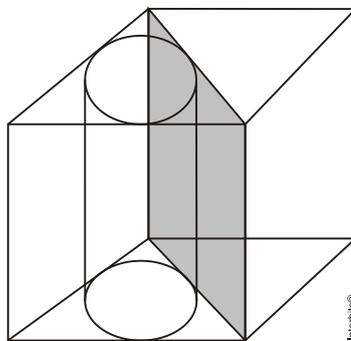
Admita que os segmentos de reta  $\overline{PA}$  e  $\overline{CQ}$  estão contidos nas bissetrizes de dois ângulos retos do terreno e que a área do paralelogramo PAQC tem medida S. Determine o maior valor, em  $m^2$ , que S pode assumir.

- 9.** Sejam a e b dois números reais positivos e A, G e H, respectivamente, as médias aritmética, geométrica e harmônica desses dois números. Admita que  $a > b$  e que a sequência (A, G, H) seja uma progressão geométrica de razão  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Determine  $\frac{a}{b}$ .
- 10.** Ao final de um campeonato de futebol, foram premiados todos os jogadores que marcaram 13, 14 ou 15 gols cada um. O número total de gols realizados pelos premiados foi igual a 125 e, desses atletas, apenas cinco marcaram mais de 13 gols. Calcule o número de atletas que fizeram 15 gols.
- 11.** Um cofre eletrônico possui um painel com dez teclas numéricas e pode ser aberto por meio da digitação, em qualquer ordem, de três teclas distintas dentre seis habilidades previamente pelo fabricante. Considere n o número máximo de conjuntos distintos de três teclas que abrem o cofre. Na figura em destaque, as teclas azuis representam as habilidades previamente.



Se o fabricante reduzisse para cinco o número de teclas habilitadas, haveria entre elas um total de  $m$  conjuntos distintos de três teclas distintas para abrir o cofre. Calcule o valor de  $n - m$ .

- 12.** Uma criança guarda moedas de R\$ 1,00 e de R\$ 0,50 em duas caixas, uma verde e outra amarela. Na caixa amarela, há, exatamente, 12 moedas de R\$ 1,00 e 15 moedas de R\$ 0,50. Admita que, após a transferência de  $n$  moedas de R\$ 1,00 da caixa verde para a amarela, a probabilidade de se retirar ao acaso uma moeda de R\$ 1,00 da caixa amarela seja igual a 50%. Calcule o valor de  $n$ .
- 13.** Uma caixa cúbica foi dividida em duas partes por um plano que contém duas diagonais de faces opostas da caixa. Uma das partes acomoda, sem folga, uma lata com a forma de um cilindro circular reto, conforme ilustrado a seguir.



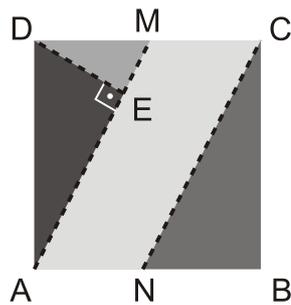
Desprezando as espessuras dos materiais utilizados na lata, na caixa e na divisória, calcule a razão entre o volume do cilindro e o da caixa.

- 14.** Suponha que  $x$  e  $y$  são números reais positivos que apresentam logaritmos com bases diferentes, conforme as igualdades a seguir:

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$$

Calcule a razão  $\frac{y}{x}$ .

15. Observe a figura a seguir, que representa um quadrado ABCD, de papel, no qual M e N são os pontos médios de dois de seus lados. Esse quadrado foi dividido em quatro partes para formar um jogo.



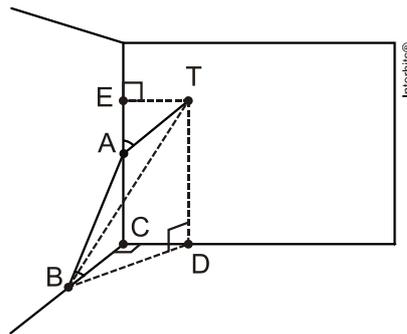
O jogo consiste em montar, com todas essas partes, um retângulo cuja base seja maior que a altura. O retângulo PQRS, mostrado a seguir, resolve o problema proposto no jogo.



Calcule a razão  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PQ}}$ .

## Gabarito

1. Considere a figura.



Do triângulo ABC, temos que  $\widehat{CBA} = 45^\circ$  e  $\widehat{ACB} = 90^\circ$  implicam em  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ . Logo,

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}.$$

Como os triângulos ABC e ATE são congruentes, vem que  $\overline{TE} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \overline{CD}$  (CDTE é retângulo). Assim, os triângulos ABC e BCD também são congruentes e  $\overline{DT} = 2 \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BDT, obtemos:

$$\overline{BT}^2 = \overline{DT}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} \cdot \sqrt{2})^2 + \overline{AB}^2 = 3 \cdot \overline{AB}^2.$$

Portanto, aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABT, segue que:

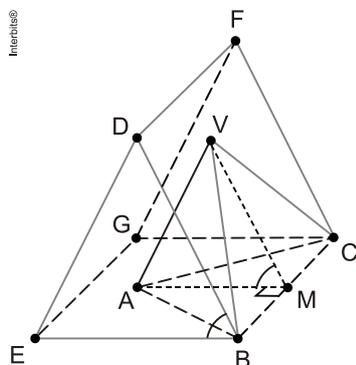
$$\overline{BT}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AT}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AT} \cdot \cos \widehat{BAT}$$

$$3 \cdot \overline{AB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB}^2 \cdot \cos \widehat{BAT}$$

$$\cos \widehat{BAT} = -\frac{\overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AB}^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAT} = 120^\circ.$$

2. O volume inicial da pedra é dado por

$$(BED) \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{BD} \cdot \sin \widehat{DBE} \cdot \overline{BC}.$$



Seja M o ponto médio da aresta BC. Como V pertence à face BDFC, segue que  $\widehat{DBE} \equiv \widehat{VMA}$ . Além disso, como  $\triangle VABC$  é regular, temos:

$$\overline{VA} = \overline{BC} = 1\text{m} \quad \text{e} \quad \overline{MV} = \overline{MA} = \frac{\overline{BC} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Desse modo, aplicando a lei dos cossenos no triângulo VMA, encontramos:

$$\overline{AV}^2 = \overline{MV}^2 + \overline{MA}^2 - 2 \cdot \overline{MV} \cdot \overline{MA} \cdot \cos \widehat{VMA}$$

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \cos \widehat{VMA}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \cos \widehat{VMA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \widehat{VMA} = \frac{1}{3}.$$

Mas

$$\sin^2 \widehat{VMA} + \cos^2 \widehat{VMA} = 1 \Rightarrow \sin \widehat{VMA} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sin \widehat{DBE}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{BD} \cdot \sin \widehat{DBE} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{m}^3.$$

### 3. Resolvendo corretamente a equação, vem

$$\log^2_2 x - \log_{\sqrt[3]{2}} x = 0 \Leftrightarrow \log^2_2 x - \log_{\frac{1}{2^3}} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log^2_2 x - 3 \cdot \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x) \cdot (\log_2 x - 3) = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ \log_2 x - 3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 8 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 8 \end{array} \right.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é  $S = \{1, 8\}$ .

4. Como  $a_{22} = a_{33} = 1$  e  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3 \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ , segue que

$$2\text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 = 2\text{sen}\theta_3 \cos\theta_3 = 1 \Rightarrow \text{sen}2\theta_2 = \text{sen}2\theta_3 = \text{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Logo,

$$\left. \begin{array}{l} a_{21} = 2\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 \\ a_{31} = 2\text{sen}\theta_3 \cos\theta_1 \\ \theta_2 = \theta_3 \end{array} \right| \Rightarrow a_{21} = a_{31}.$$

Portanto, como  $A$  apresenta duas linhas idênticas,  $\det A = 0$ .

5. Após o desembarque,  $(1-0,2) \cdot n = 0,8n$  passageiros ficaram no vagão. Assim, após a entrada de 20% da quantidade de passageiros que permaneceu após o desembarque, teremos:

$$(1+0,2) \cdot 0,8n = 120 \Leftrightarrow 1,2 \cdot 0,8n = 120$$

$$\Leftrightarrow 8n = 1000$$

$$\Leftrightarrow n = 125.$$

6. Como o participante comprou 215 itens, ele terá direito a  $\frac{215}{5} = 43$  descontos de R\$ 0,03.

Logo, o participante obteve um desconto total de  $43 \cdot 0,03 = \text{R\$ } 1,29$ . Portanto, caso o cliente não participasse da promoção, ele pagaria  $155 + 1,29 = 156,29$  reais.

7. (12.000, 11.400, 10.800, ...,  $a_n$ , ...) P.A.

$$a_1 = 12.000 \text{ e } r_a = -600$$

(300, 600, 900, ...,  $b_n$ , ...) P.A.

$$b_1 = 300 \text{ e } r_b = 300$$

$$a_n = b_n$$

$$\Rightarrow a_1 + (n-1)r_a = b_1 + (n-1)r_b$$

$$\Rightarrow 12.000 + (n-1)(-600) = 300 + (n-1)(300)$$

$$\Rightarrow 12.000 - 300 = (n-1)(600 + 300)$$

$$\Rightarrow 11.700 = (n-1)900$$

$$\Rightarrow 13 = n - 1$$

- $\Rightarrow n = 14$   
 $\Rightarrow 1 \text{ ano} + 2 \text{ meses}$   
 $\Rightarrow \text{fevereiro de 2011}$

8.

$$\begin{aligned} \overline{PC} = \overline{AQ} &= y \\ \overline{AD} = \overline{DP} &= x \\ 2y + 4x &= 800 \Rightarrow y + 2x = 400 \Rightarrow y = 400 - 2x \\ S = yx &= (400 - 2x)x = -2x^2 + 400x \end{aligned}$$

Logo:

$$S_{\text{máxima}} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(160000 - 0)}{-8} = 20.000\text{m}^2$$

$$9. \quad A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab} \quad \text{e} \quad H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

A sequência (A, G, H) é uma P.G. de razão  $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$G = Ax \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} x \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ab = \frac{3(a+b)^2}{16} \Rightarrow 16ab = 3(a^2 + 2ab + b^2) \Rightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{10b \pm \sqrt{(-10b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (3b^2)}}{2 \cdot 3} = \frac{10b \pm \sqrt{100b^2 - 36b^2}}{6} = \frac{10b \pm 8b}{6}$$

$$\Rightarrow a = 3b \quad \text{ou} \quad a = \frac{2}{3}b$$

a e b são números reais positivos com  $a > b$ , logo:  $\frac{a}{b} = 3$ .

10. Sejam:

- $x = \text{número de atletas que marcaram 13 gols}$   
 $y = \text{número de atletas que marcaram 14 gols}$   
 $z = \text{número de atletas que marcaram 15 gols}$

Logo:

$$13x + 14y + 15z = 125$$

$$y + z = 5 \Rightarrow z = 5 - y \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 5$$

$$13x + 14y + 15(5 - y) = 125 \Rightarrow 13x + 14y + 75 - 15y = 125$$

$$\Rightarrow 13x - y = 50 \Rightarrow 13x - 50 = y$$

$$0 \leq y \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 13x - 50 \leq 5 \Rightarrow 50 \leq 13x \leq 55 \Rightarrow \frac{50}{13} \leq x \leq \frac{55}{13} \Rightarrow x = 4$$

Portanto:

$$y = 13x - 50 = 13 \times 4 - 50 = 2$$

$$z = 5 - y = 3$$

O número de atletas que fizeram 15 gols é igual a 3.

11.

$$n = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

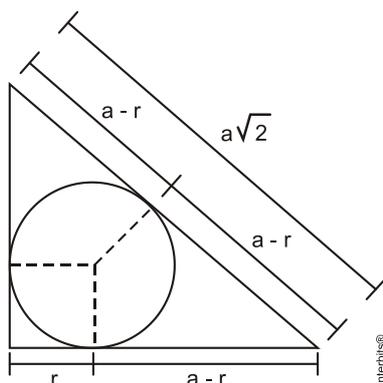
$$m = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

Logo:  $n - m = 20 - 10 = 10$

12.  $\frac{1}{2} = \frac{12+n}{12+n+15}$

$$\Rightarrow 12 + n + 15 = 2(12 + n) \Rightarrow n + 27 = 24 + 2n \Rightarrow 27 - 24 = 2n - n \Rightarrow n = 3$$

13.



Relação entre a aresta  $a$  do cubo e o raio  $r$  do cilindro:

$$2a - 2r = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2} \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2}$$

$$\text{Logo: } V_{(\text{cilindro})} = \pi r^2 xa \text{ e } V_{(\text{cubo})} = a^3$$

$$\text{Assim: } \frac{V_{(\text{cilindro})}}{V_{(\text{cubo})}} = \frac{\pi r^2 xa}{a^3} = \pi x \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \pi \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4}$$

$$14. \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) = k$$

$$\log_9 x = k \Rightarrow 9^k = x$$

$$\log_6 y = k \Rightarrow 6^k = y$$

$$\log_4 (x + y) = k \Rightarrow 4^k = (x + y)$$

$$4^k = 9^k + 6^k \Rightarrow 4^k - 6^k - 9^k = 0 \Rightarrow (2^k)^2 - 3^k (2^k) - 3^{2k} = 0$$

Considerando  $z = 2^k$ :

$$z^2 - 3^k z - 3^{2k} = 0 \Rightarrow z = \frac{3^k \pm \sqrt{3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k}}}{2} = \frac{3^k \pm 3^k \sqrt{5}}{2}$$

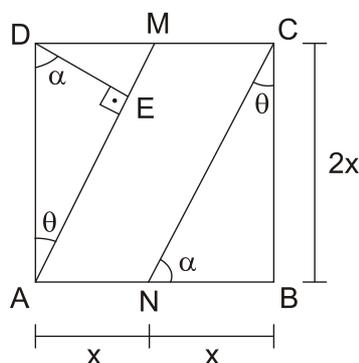
Como  $z$  é positivo:

$$z = \frac{3^k + 3^k \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2^k}{3^k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto:

$$\frac{y}{x} = \frac{6^k}{9^k} = \left(\frac{6}{9}\right)^k = \frac{2^k}{3^k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

15.

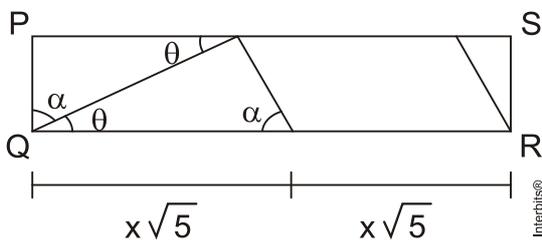


$$\overline{CN}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{CN}^2 = x^2 + 4x^2 \Rightarrow \overline{CN} = x\sqrt{5}$$

$$\overline{MC} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{MC} = x$$

A seguinte relação é válida para o triângulo ADM:

$$\sqrt[3]{5x\overline{DE}} = 2x^2 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{2x}{\sqrt{5}}$$

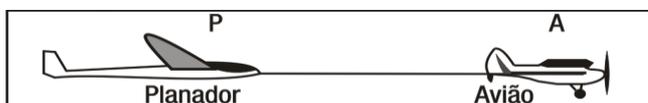


Como  $\overline{PQ} = \overline{DE}$ , pode-se obter a razão:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PQ}} = \frac{2x\sqrt{5}}{\frac{2x}{\sqrt{5}}} = 5$$

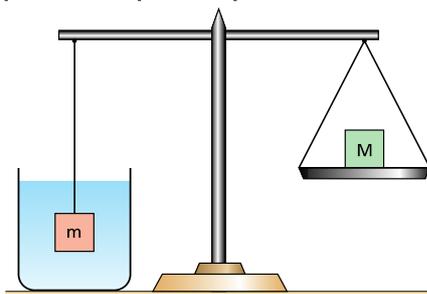
## Prova Específica 8

1. (UFRJ 2003 – Específica) Um avião “A” reboca um planador “P” com velocidade constante de 60m/s numa trajetória horizontal, como ilustra a figura. O cabo utilizado para o reboque tem massa desprezível e está sob uma tensão, considerada uniforme, de 2000N. As forças horizontais (forças de arrasto) que o ar opõe aos movimentos do avião e do planador são tais que a força de arrasto, no avião, é 20% maior do que no planador.

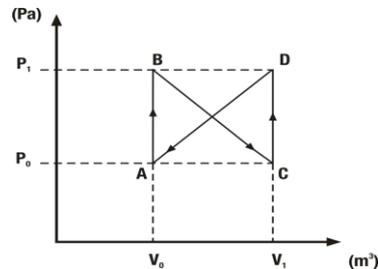


Calcule:

- a) O módulo da força horizontal que o ar exerce sobre o planador P. Justifique.  
b) A potência mínima em kW que o motor do avião tem de desenvolver para efetuar o reboque nessas condições.
2. (UFPE) Um bloco de massa  $m=5,0 \cdot 10^2\text{g}$  e volume igual a  $30\text{cm}^3$  é suspenso por uma balança de braços iguais, apoiada em seu centro de gravidade, sendo completamente imerso em um líquido. Sabendo que para equilibrar a balança é necessário colocar uma massa  $M=2,0 \cdot 10^2\text{g}$  sobre o prato suspenso pelo outro braço, determine:

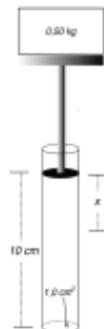


- a) a intensidade do empuxo que o líquido exerce no bloco;  
b) a densidade do líquido.  
Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e despreze o efeito do ar, bem como o peso do prato da balança.
3. (UFRJ 2003 – Específica) Um gás ideal realizou um ciclo termodinâmico ABCDA, ilustrado na figura.



- a) Calcule o trabalho total realizado pelo gás no ciclo.  
 b) Aplicando a 1ª lei da Termodinâmica ao gás no ciclo e adotando a convenção de que o calor absorvido é positivo e o calor cedido é negativo, investigue a soma do calor trocado nas diagonais, isto é,  $Q_{BC} + Q_{DA}$ , e conclua se esta soma é maior, igual ou menor que zero. Justifique sua resposta.

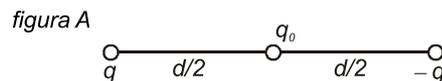
4. (UFRJ) Um gás ideal em equilíbrio termodinâmico está armazenado em um tubo cilíndrico fino de altura  $L=10,0\text{cm}$  e área transversal  $A=1,0\text{cm}^2$ , provido de um êmbolo móvel perfeitamente ajustado às paredes do tubo. Suponha que a massa do conjunto móvel composto por êmbolo, haste e suporte seja desprezível e, portanto, a pressão no interior do tubo seja inicialmente igual à pressão atmosférica,  $P_a=1,0\times 10^5\text{N/m}^2$ . Uma massa  $m=0,50\text{ kg}$  é então colocada sobre o suporte (veja a figura).



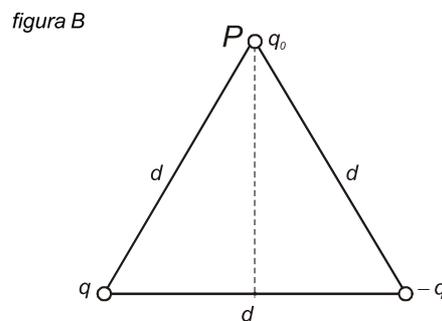
Sob ação do peso da massa  $m$ , o êmbolo desce uma altura  $x$ , em que o gás volta a atingir o equilíbrio termodinâmico com a mesma temperatura do estado inicial. Suponha que a aceleração da gravidade seja  $g=10\text{m/s}^2$ . Calcule o valor de  $x$ .

5. (UFRJ - Específica) Duas cargas,  $q$  e  $-q$ , são mantidas fixas a uma distância  $d$  uma da outra. Uma terceira carga  $q_0$  é colocada no ponto médio entre as duas primeiras, como

ilustra a *figura A*. Nessa situação, o módulo da força eletrostática resultante sobre a carga  $q_0$  vale  $F_A$ .

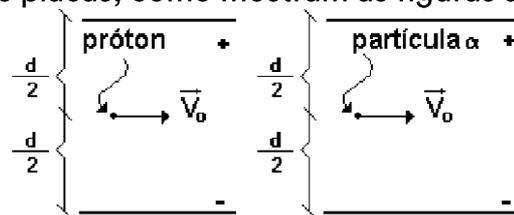


A carga  $q_0$  é então afastada dessa posição ao longo da mediatriz entre as duas outras até atingir o ponto  $P$ , onde é fixada, como ilustra a *figura B*. Agora, as três cargas estão nos vértices de um triângulo equilátero. Nessa situação, o módulo da força eletrostática resultante sobre a carga  $q_0$  vale  $F_B$ .



Calcule a razão  $F_A / F_B$ .

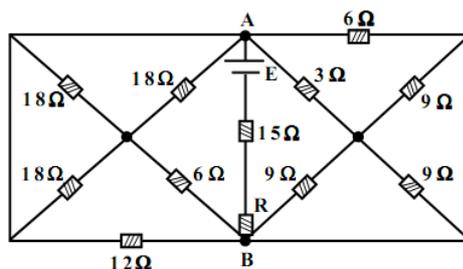
6. (UFRJ) Entre duas placas planas, condutoras e paralelas, carregadas com cargas de módulos iguais mas de sinais contrários, há um campo elétrico uniforme. Um próton e uma partícula  $\alpha$  penetram na região entre as placas, equidistantes delas, com a mesma velocidade  $V_0$  paralela às placas, como mostram as figuras a seguir.



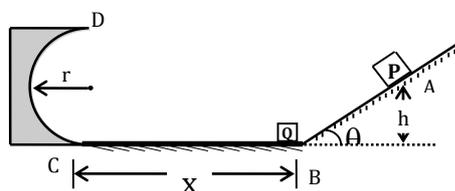
Lembre-se de que a partícula  $\alpha$  é o núcleo do átomo de hélio (He), constituída, portanto, por 2 prótons e 2 nêutrons. Despreze os efeitos de borda.

- Calcule a razão entre os módulos das acelerações adquiridas pelo próton e pela partícula  $\alpha$ .
- Calcule a razão entre os intervalos de tempo gastos pelo próton e pela partícula  $\alpha$  até colidirem com a placa negativa.

7. (IME) Determine o valor de  $R$  para que a corrente na bateria seja de  $1A$ , sabendo que  $E=18V$ .



8. (IME) A figura mostra um bloco  $P$  de massa  $10kg$  que parte do repouso em  $A$  e desce o plano inclinado com atrito cujo coeficiente cinético é  $\mu=0,2$ . Em  $B$ , o bloco  $P$  choca-se com o bloco  $Q$  de massa  $2kg$ , inicialmente em repouso. Com o choque,  $Q$  desloca-se na pista horizontal, desliza sobre sua parte semicircular e vai cair sobre o ponto  $B$ . Sabendo que as partes horizontal e semicircular da pista não têm atrito e que o coeficiente de restituição entre  $P$  e  $Q$  é  $0,8$ , determine a altura  $h$ . Despreze a resistência do ar e as dimensões dos blocos.



Dados:

$$g = 10m/s^2$$

$$r = 2,5m$$

$$x = 2\sqrt{11}m$$

$$\theta = 45^\circ$$

## ***Gabarito***

- 1.** a) 2000N  
b) 264 kW
- 2.** a) 3,0N  
b)  $1,0 \cdot 10^4 \text{kg/m}^3$
- 3.** a) zero  
b) Negativo
- 4.**  $10/3 \text{cm}$
- 5.** 8
- 6.** a) 2  
b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 7.** 1
- 8.** 4m

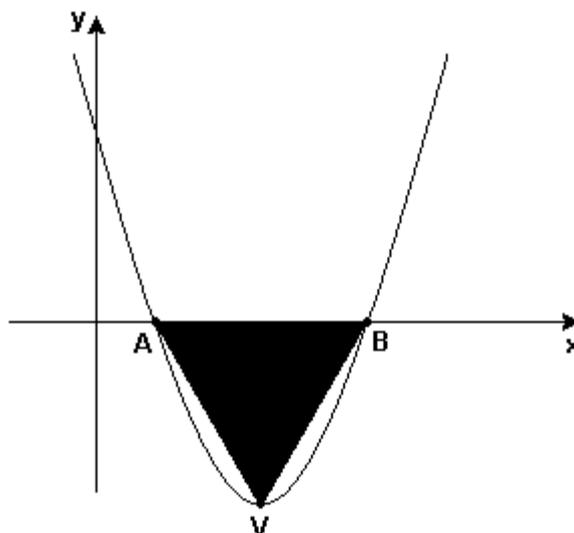
## Prova Específica 6

1. Maurren Maggi foi a primeira brasileira a ganhar uma medalha olímpica de ouro na modalidade salto em distância. Em um treino, no qual saltou  $n$  vezes, a atleta obteve o seguinte desempenho:

- todos os saltos de ordem ímpar foram válidos e os de ordem par inválidos;
- o primeiro salto atingiu a marca de 7,04 m, o terceiro a marca de 7,07 m, e assim sucessivamente cada salto válido aumentou sua medida em 3 cm;
- o último salto foi de ordem ímpar e atingiu a marca de 7,22 m.

Calcule o valor de  $n$ .

2. Observe a parábola de vértice  $V$ , gráfico da função quadrática definida por  $y = ax^2 + bx + c$ , que corta o eixo das abscissas nos pontos  $A$  e  $B$ .



Calcule o valor numérico de  $\Delta = b^2 - 4ac$ , sabendo que o triângulo  $ABV$  é equilátero.

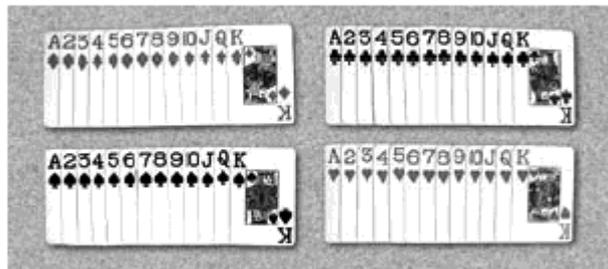
3. Considere a situação a seguir:  
Em um salão há apenas 6 mulheres e 6 homens que sabem dançar. Calcule o número total de pares de pessoas de sexos opostos que podem ser formados para dançar.

Um estudante resolveu esse problema do seguinte modo:

A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 12 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 6 modos, pois deve ser de sexo diferente da primeira. Há, portanto,  $12 \times 6 = 72$  modos de formar um casal.

Essa solução está errada. Apresente a solução correta.

4. Os baralhos comuns são compostos de 52 cartas divididas em quatro naipes, denominados copas, espadas, paus e ouros, com treze cartas distintas de cada um deles. Observe a figura que mostra um desses baralhos, no qual as cartas representadas pelas letras A, J, Q e K são denominadas, respectivamente, ás, valete, dama e rei.



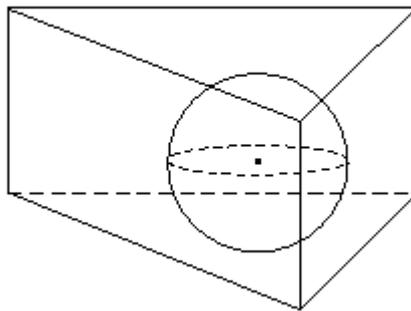
Uma criança rasgou algumas cartas desse baralho, e as  $n$  cartas restantes, não rasgadas, foram guardadas em uma caixa.

Os dados a seguir apresentam as probabilidades de retirar-se dessa caixa, ao acaso, as seguintes cartas:

carta	probabilidade
um rei .....	0,075
uma carta de copas .....	0,25
uma carta de copas ou rei .....	0,3

Calcule o valor de  $n$ .

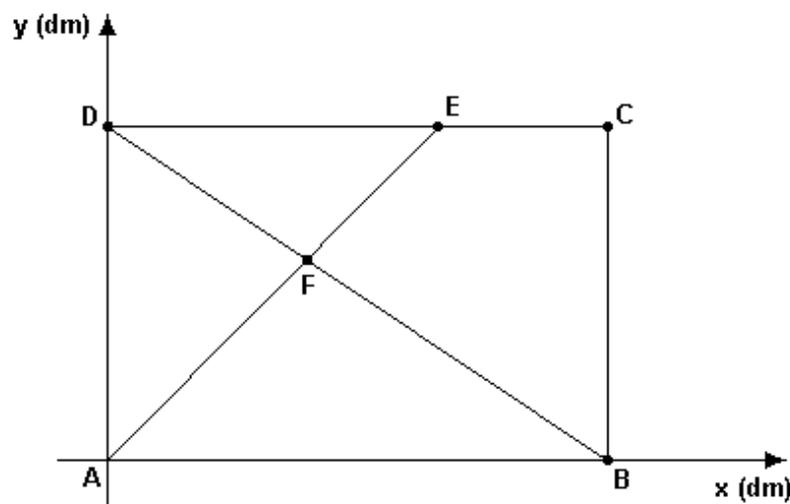
5. A figura a seguir representa uma caixa, com a forma de um prisma triangular regular, contendo uma bola perfeitamente esférica que tangencia internamente as cinco faces do prisma.



Admitindo  $\pi = 3$ , determine o valor aproximado da porcentagem ocupada pelo volume da bola em relação ao volume da caixa.

6. Em uma folha de fórmica retangular ABCD, com 15 dm de comprimento  $\overline{AB}$  por 10 dm de largura  $\overline{AD}$ , um marceneiro traça dois segmentos de reta,  $\overline{AE}$  e  $\overline{BD}$ . No ponto F, onde o marceneiro pretende fixar um prego, ocorre a interseção desses segmentos.

A figura a seguir representa a folha de fórmica no primeiro quadrante de um sistema de eixos coordenados.



Considerando a medida do segmento  $\overline{EC}$  igual a 5 dm, determine as coordenadas do ponto F.

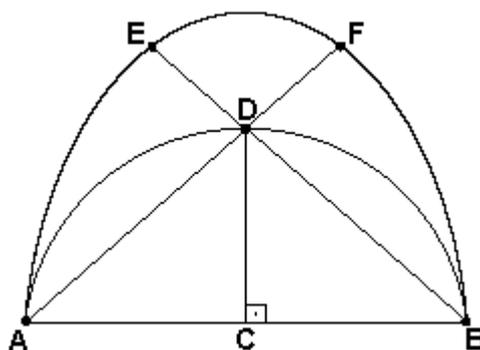
7. Uma sequência de três números não nulos  $(a, b, c)$  está em progressão harmônica se seus inversos  $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ , nesta ordem, formam uma progressão aritmética.

As raízes da equação a seguir, de incógnita  $x$ , estão em progressão harmônica.

$$x^2 + mx^2 + 15x - 25 = 0$$

Considerando o conjunto dos números complexos, apresente todas as raízes dessa equação.

8. Observe a curva AEFB desenhada a seguir.



Analise os passos seguidos em sua construção:

- 1º) traçar um semicírculo de diâmetro  $\overline{AB}$  com centro C e raio 2 cm;
- 2º) traçar o segmento  $\overline{CD}$ , perpendicular a  $\overline{AB}$ , partindo do ponto C e encontrando o ponto D, pertencente ao arco AB;
- 3º) construir o arco circular AE, de raio  $\overline{AB}$  e centro B, sendo E a interseção com o prolongamento do segmento  $\overline{BD}$ , no sentido B para D;
- 4º) construir o arco circular BF, de raio  $\overline{AB}$  e centro A, sendo F a interseção com o prolongamento do segmento  $\overline{AD}$ , no sentido A para D;
- 5º) desenhar o arco circular EF com centro D e raio  $\overline{DE}$ .

Determine o comprimento, em centímetros, da curva AEFB.

9. Considere o teorema e os dados a seguir.

Se  $\alpha, \beta$  e  $\alpha + \beta$  são três ângulos diferentes de  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , então

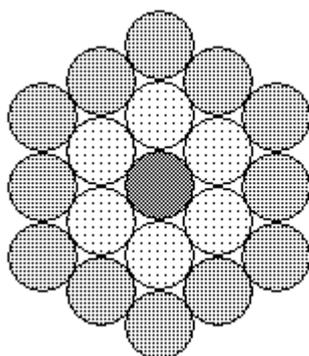
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - (\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\beta)}.$$

a, b e c são três ângulos, sendo  $\operatorname{tg}b = 2$  e  $\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{4}{5}$ .

Calcule  $\operatorname{tg}(a - b + c)$ .

10. Admita dois números inteiros positivos, representados por a e b. Os restos das divisões de a e b por 8 são, respectivamente, 7 e 5.  
Determine o resto da divisão do produto a.b por 8.

11. Moedas idênticas de 10 centavos de real foram arrumadas sobre uma mesa, obedecendo à disposição apresentada no desenho: uma moeda no centro e as demais formando camadas tangentes.



Considerando que a última camada é composta por 84 moedas, calcule a quantia, em reais, do total de moedas usadas nessa arrumação.

12. O peso  $P$  de um objeto, a uma altura  $h$  acima do nível do mar, satisfaz a seguinte equação:

$$P = \left( \frac{r}{h+r} \right)^2 \cdot P_0$$

$P_0$ : peso do objeto ao nível do mar  
 $r$ : raio da Terra

Sabe-se que  $P$  equivale a 81% de  $P_0$  quando o objeto se encontra a uma altura  $h_1$ . Calcule, em função de  $r$ , o valor de  $h_1$ .

13. Observe parte da tabela do quadro de medalhas dos Jogos Pan-americanos do Rio de Janeiro em 2007 (tabela I).

Com base na tabela, é possível formar a matriz quadrada  $A$  cujos elementos  $a_{ij}$  representam o número de medalhas do tipo  $j$  que o país  $i$  ganhou, sendo  $i$  e  $j$  pertencentes ao conjunto  $\{1, 2, 3\}$ .

Para fazer outra classificação desses países, são atribuídos às medalhas os seguintes valores:

- ouro: 3 pontos;
- prata: 2 pontos;
- bronze: 1 ponto.

Esses valores compõem a matriz  $V = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

país	medalhas			
	tipos			total
	1- ouro	2- prata	3- bronze	
1- Estados Unidos	97	88	52	237
2- Cuba	59	35	41	135
3- Brasil	54	40	67	161

Tabela I – Quadro de medalhas Jogos Pan-americanos RJ 2007



Admita que a partícula faça outra trajetória composta somente pela sequência de movimentos CDD, que se repete durante 5 minutos, partindo de A. Determine a equação da reta que passa pela origem  $O(0,0)$  e pelo último ponto dessa nova trajetória.

## ***Gabarito***

- 1.**  $n = 13$
- 2.**  $\Delta = 12$
- 3.** 36.
- 4.**  $n = 40$ .
- 5.** 38%
- 6.**  $F = (6,6)$
- 7.** 5,  $1 - 2i$ ,  $1 + 2i$
- 8.**  $\pi (4 - \sqrt{2})$  cm
- 9.** - 32
- 10.** 3
- 11.** R\$ 63,10
- 12.**  $h_1 = \frac{r}{9}$
- 13.** Estados Unidos: 519  
Cuba: 288  
Brasil: 309
- 14.** 6 cm
- 15.**  $y = \frac{50x}{101}$