Mat.

Professor: Gabriel Miranda
Luanna Ramos

Monitor: Fernanda Aranzate

Introdução ao estudo das funções: Classificação e determinação de Domínio e Imagem

05 abr

RESUMO

Nesta aula iremos dar continuidade ao estudo das funções, vamos classificá-las.

Classificação:

- Função sobrejetora: É aquela que tem o conjunto imagem igual ao contradomínio.
- Função injetora: É aquela que, para cada elemento da imagem, existe apenas um elemento no domínio. Ou seja, em uma função injetora, elementos distintos do domínio possuem imagens distintas no contradomínio.
- Função bijetora: Uma função é bijetora quando é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Obs: É importante saber que existem funções que não são nem injetoras, nem sobrejetoras. Elas simplesmente não apresentam classificação sob esse critério.

- Função par: Uma função é dita par, se e somente se $f(-x) = f(x)$. Ou seja, valores simétricos de x possuem a mesma imagem.

Dica: o gráfico de uma função par apresenta simetria em relação ao eixo y.

- Função ímpar: Uma função é dita par, se e somente se $f(-x) = -f(x)$. Ou seja, valores simétricos de x possuem imagens simétricas.

Dica: o gráfico de uma função par apresenta simetria em relação à origem.

Obs: Existem funções que não podem ser classificadas quanto a paridade, ou seja, não são nem pares nem ímpares.

Elementos de uma função:

Sendo A = {0,1,2,3} e B = = {0,1,2,3,4,5}, definimos função da seguinte forma:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow f(x) = x + 2$$

f: nome da função
A: Domínio da função
B: Contradomínio da função
f(x) = x + 2: lei de formação da função.

Domínio e Imagem:

O conjunto dos elementos que contém as abscissas (x) da relação se chama domínio. Já o conjunto dos elementos que contém as ordenadas (y) da relação se chama imagem. No caso do exemplo anterior, temos: D = {0,1,2,3} e I = {2,3,4,5}

Domínio de uma função:
Algumas funções reais apresentam problemas no cálculo de imagens para certos valores de x. A função $f(x) = \frac{3}{x}$, apresenta problema para x = 0, já que não existe divisão por zero. Como o elemento x = 0 não

possui imagem, dizemos que ele não está definido no domínio dessa função. Dessa maneira, temos que prestar atenção e calcular o domínio da função com que estamos trabalhando. Temos que observar duas condições necessárias:

a) O denominador de qualquer função é diferente de zero.
b) Radicando de raízes de índice par são sempre positivos.

Função composta:

Função composta é aquela que tem como abscissa a imagem de outra função.

$$h(x) = f[g(x)] = fog$$

Ou seja, a abscissa de f(x) é a imagem de g(x).

- Condição de existência: Para que haja a função composta da função g com a função f, o domínio de g deve ser igual ao contradomínio de f.

Função inversa:

Definimos função inversa (f^{-1}) de uma função f do seguinte modo:

$$\forall(a,b) \in f \Leftrightarrow \exists(b,a) \in f^{-1}$$

Ou seja, para todo par ordenado (a,b) pertencente à função f, existe um par ordenado (b,a) correspondente na função inversa f^{-1}.

Dica: A relação inversa de f: A ⟶ B é uma função f^{-1}: B ⟶ **A, se e somente se, f é uma função bijetora.**

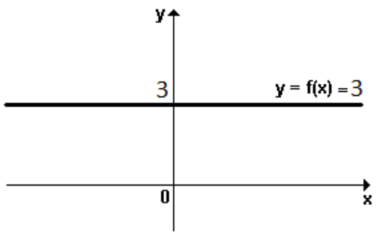
- Lei de formação: Para encontrarmos a lei de formação de uma função inversa, devemos seguir os seguintes passos:

I) Na lei de formação de f, devemos trocar o y por x e o x por y.
II) Depois, devemos isolar o novo y.
Ex: Vamos achar a inversa de f(x) = x + 1.
y = x + 1
x = y + 1 (trocando x por y e y por x)
y = x – 1 = f^{-1}(x)

- Gráfico: O gráfico de uma f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta y = x, chamada de função identidade.

Função constante:

É aquele que, qualquer que seja o valor da abscissa, terá sempre a mesma ordenada.
Ex: f(x) = 3.
No exemplo acima fica claro que a função independe da variável x, ou seja, qualquer que seja o valor de x, a função sempre valerá 3.



função constante

EXERCÍCIOS DE AULA

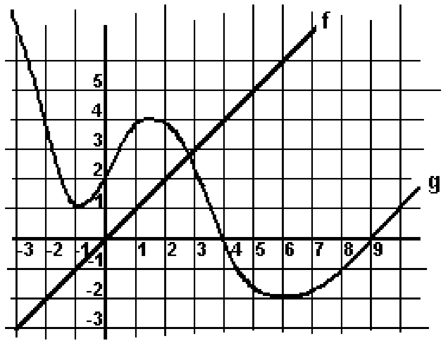
1. Para a função f: $IN^* \rightarrow IN^*$ que a cada número natural não nulo associa o seu número de divisores, considere as afirmativas:
(I) existe um natural não nulo tal que f(n) = n.
(II) f é crescente.
(III) f não é injetiva.

Assinale a opção que contém a(s) afirmativa(s) correta(s).
a) Apenas II
b) Apenas I e III
c) I, II, III
d) Apenas I
e) Apenas I e II.

2. O dominio da funcao real $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2 - 8x + 12}$ é:

a)]2, ∞[.
b)]2, 6[.
c)]– ∞, 6].
d)]–2, 2].
e)]– ∞, 2[.

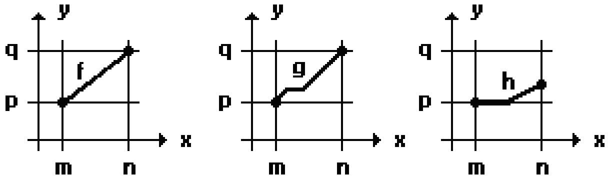
3. Na figura estão representados os gráficos de uma função polinomial g, e da função f(x) = x. A partir da figura pode-se determinar que $(g(6)^2 - g(g(6))$ vale aproximadamente:



a) -2
b) 4
c) 0
d) -1
e) 1

4. Seja a função f : R ⟶ R definida por f(x) = 4x – 3. Se f^{-1} é a função inversa de f, então $f^{-1}(5)$ é
a) 17
b) 1/17
c) 2
d) 1/2

5. Considere as funcoes f, g e h, todas definidas em [m, n] com imagens em [p, q] representadas atraves dos graficos a seguir:



Pode-se afirmar que:
a) f e bijetiva, g e sobrejetiva e h nao e injetiva.
b) f e sobrejetiva, g e injetiva e h nao e sobrejetiva.
c) f nao e injetiva, g e bijetiva e h e injetiva.
d) f e injetiva, g nao e sobrejetiva e h e bijetiva.
e) f e sobrejetiva, g nao e injetiva e h e sobrejetiva.

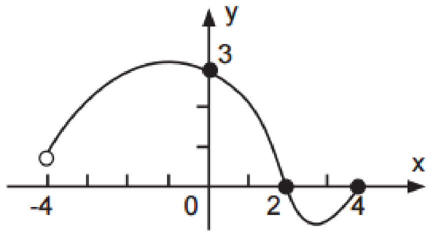
EXERCÍCIOS DE CASA

1. Uma função é constante. Se $f(\pi) = \pi$, então f(2) vale:
a) π
b) 2π
c) π^2
d) $\pi + 2$
e) 2

2. Se $f : R \rightarrow R$ é uma função definida pela expressão $f(x-1) = 3x$, então o valor de f(3) é igual a:
a) 0
b) 1
c) 12
d) 15
e) 64

3. Para um número real fixo α, a função $f(x) = 2x + \alpha$ é tal que $f(f(1))= 10$. O valor de α é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

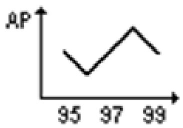
4. Analise o gráfico da função f e assinale a única alternativa falsa:



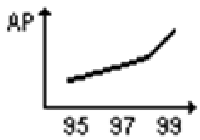
a) $f(1) > 0$
b) $f(0) = 3$
c) $- 4 \notin D(f)$
d) $f(1) < f(2)$
e) $f(2) = f(4) = 0$

5. O quadro apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.
O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:

	Safra				
	1995	1996	1997	1998	1999
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (em kg/hectare)	1.500	2.500	2.500	2.500	4.000

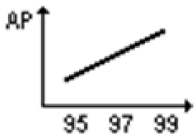
a)


c)

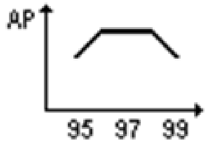


d)

b)

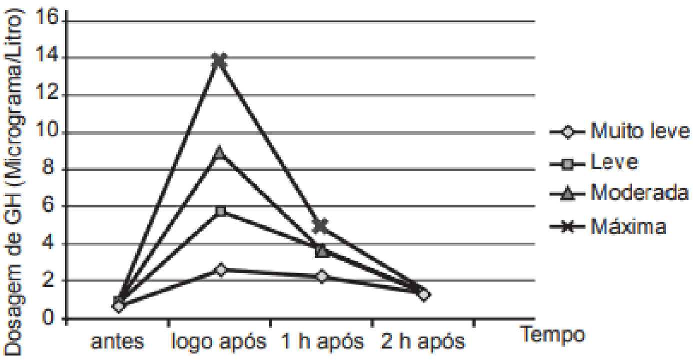


e)



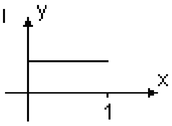
6. Considere os conjuntos A e B: A = {–30, –20, –10, 0, 10, 20, 30} e B = {100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000}, e a funcao f: A → B, $f(x) = x^2 + 100$.
O conjunto imagem de f é:
a) {–30, –20, –10, 0, 10, 20, 30}.
b) {100, 200, 500, 1000}.
c) {300, 400, 600, 700, 800, 900}.
d) {100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800,900, 1000}.
e) conjunto vazio

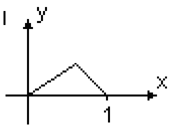
7. GH é a sigla que denomina o hormônio do crescimento (do inglês growth hormone), indispensável para retardar o processo de envelhecimento. À medida que envelhecemos, a liberação desse hormônio na corrente sanguínea vai diminuindo. Estudos têm demonstrado, porém, que alguns métodos de treinamento aumentam a produção de GH. Em uma pesquisa, dez homens foram submetidos a sessões de 30 minutos de corrida, em uma esteira, em diferentes intensidades: muito leve, leve, moderada e máxima. As dosagens de GH, medidas por coletas de sangue feitas antes e logo após as sessões, e também 1 hora e 2 horas após o término, são fornecidas no gráfico.

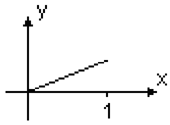


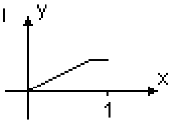
Em qual(is) medição(ões) a liberação de GH na corrente sanguínea em uma sessão de intensidade máxima foi maior que a liberação de GH ocorridas nas demais intensidades?
a) Apenas na medição feita logo após a sessão de treinamento.
b) Apenas na medição feita 1 hora após a sessão de treinamento.
c) Apenas na medição feita 2 hora após a sessão de treinamento.
d) Nas medições feitas logo após e 1 hora após a sessão de treinamento.
e) Nas medições feitas logo após, 1 hora após e 2 horas após a sessão de treinamento.

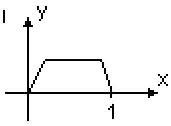
8. Ha funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade: “a valores distintos de x correspondem valores distintos de y”. Tais funcoes sao chamadas injetoras. Qual, dentre as funcoes cujos graficos aparecem abaixo, é injetora?

a)


c)


e)


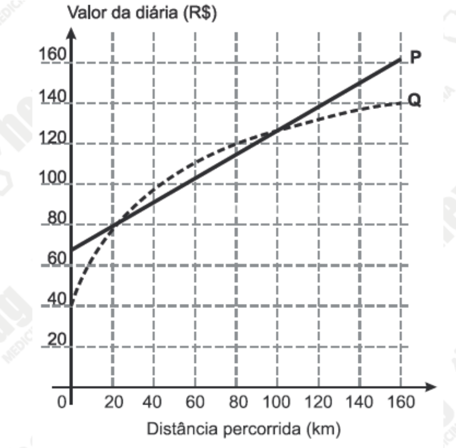
b)


d)


9. No primeiro ano do ensino médio de uma escola, é hábito os alunos dançarem quadrilha na festa junina. Neste ano, há 12 meninas e 13 meninos na turma, e para a quadrilha foram formados 12 pares distintos, compostos por uma menina e um menino. Considere que as meninas sejam os elementos

que compõem o conjunto A e os meninos, o conjunto B, de modo que os pares formados representem uma função de A em B.
Com base nessas informações , a classificação do tipo de função que está presente nessa relação é:
a) f é injetora, pois para cada menina pertencente ao conjunto A está associado um menino diferente pertencente ao conjunto B.
b) f é sobrejetora, pois cada par é formado por uma menina pertencente ao conjunto A e um menino pertencente ao conjunto B, sobrando um menino sem formar par.
c) f é injetora, pois duas meninas quaisquer pertencentes ao conjunto A formam par com um mesmo menino pertencente ao conjunto B, para envolver a totalidade de alunos da turma.
d) f é bijetora, pois dois meninos quaisquer pertencentes ao conjunto B formam par com uma mesma menina pertencente ao conjunto A.
e) f é sobrejetora, pois basta que uma menina do conjunto A forme par com dois meninos pertencentes ao conjunto B, assim nenhum menino ficará sem par.

10. Atualmente existem diversas locadoras de veiculos, permitindo uma concorrência saudavel para o mercado, fazendo com que os precos se tornem acessiveis. Nas locadoras P e Q o valor da diaria de seus carros depende da distancia percorrida, conforme o grafico.



Disponível em: www.sempretops.com
Acesso em: 7 ago. 2010

O valor pago na locadora Q e menor ou igual aquele pago na locadora P para distancias, em quilometros, presentes em qual(is) intervalo(s)?
a) De 20 a 100.
b) De 80 a 130.
c) De 100 a 160.
d) De 0 a 20 e de 100 a 160.
e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

GABARITO

Exercícios de aula

1. b

A função é :

A = número natural não nulo.⇒ x. / domínio.

B = número de divisores de x ⇒ y. / imagem.

f(x) = número de divisores de x.

I) f(n) =n, por exemplo f(1) = 1

O número natural 1 tem apenas um divisor, ele mesmo. / afirmativa verdadeira.

II) f(1) = 1 ⇒ Observe que quando o domínio da funçao aumenta sua
f(2) = 2 imagem não a acompanha em crescimento. Logo f não
f(3) = 2 é crescente.
f(4) = 3
f(5) = 2

III) Função injetiva é aquela em que um elemento da imagem da função **não** corresponde a mais de um elemento do domínio da função.

Nessa função temos: f(2) = f(3), uma mesma imagem corresponde a dois elementos do domínio.

f não é injetiva.

Logo as afirmativas verdadeiras são I e III .

2. e

Para o numerador:

$$2 - x \geq 0$$
$$\text{I} \quad -x \geq -2$$
$$x \leq 2$$

Para o denominador:

$$x^2 - 8x + 12 \neq 0$$
$$\text{V} = b^2 - 4ac$$
$$\text{V} = 64 - 48$$
$$\sqrt{\text{V}} = 4$$
$$x \neq \frac{-b \pm \sqrt{\text{V}}}{2a}$$
$$x \neq \frac{8 \pm 4}{2} \begin{cases} x \neq 6 \\ x' \neq 2 \end{cases} \quad \text{II}$$

Fazendo $I \cap II$, temos $x < 2$

S:]**– ∞**, 2[.

3. b

Pelo gráfico, obtemos valores para a função g(x)

g(6) = -2

g(g(6)) = g(-2) = 4

$(g(6))^2 - g(g(6)) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

4. c
   A função é dada por Y = 4x – 3. Vamos calcular a sua função inversa:
   Y = 4x – 3
   ⇒ x = 4y – 3
   ⇒ x + 3 = 4y
   ⇒ y = (x + 3)/4
   A função inversa é dada por $f^{-1}(x) = (x + 3)/4$
   Assim, o valor de $f^{-1}(5) = (5 + 3)/4 = 8/4 = 2$

5. a

Exercícios de casa

1. a

2. c
   $f(4-1) = f(3)$
   $f(3) = 3 \times 4$
   $f(3) = 12$

3. b
   Fazendo primeiro o f(1)
   f(1) = 2.1 + a
   f(1) = 2 + a
   Substituindo o f(1) pelo seu resultado 2 + a:
   f(f(1)) = 10
   f(2+a) = 10
   Fazendo o f(2+a) separadamente fica:
   f(2+a) = 2.(2+a) + a
   f(2+a) = 4 + 2a + a
   f(2+a) = 4 + 3a
   Novamente, vamos substituir o f(2+a) na expressão:
   f(2+a) = 10
   4 + 3a = 10
   3a = 10 - 4
   3a = 6
   a = 6/3
   a = 2

4. d
   a) f(1) > 0 Verdadeiro
   Quando o x for 1 o Y é maior que 0
   b) f(0) = 3 Verdadeiro
   Quando o x for 0 o Y = 3
   c) - 4 não pertence ao domínio da função Verdadeiro
   Pois no gráfico o -4 aparece com uma bolinha aberta, logo ele não pertence ao domínio de F
   e) f(2) = f(4) = 0 Verdadeiro
   Quando x = 2 e quando x = 4, o Y = 0
   d) f(1) < f(2) Falso
   f(1) > 0
   f(2) = 0
   Logo f(1) > f(2)

5. a

Uma forma de determinar a quantidade de hectares plantados com algodão é dividindo a produção (em 1.000 kg) pela produtividade (kg/hectare).
Fazendo as divisões, você encontrará os seguintes dados para o número de hectares plantados com algodão.

1995	1996	1997	1998	1999
30.000 /1.500 = 20 hectares	40.000 / 2.500 = 16 hectares	50.000 / 2.500 = 20 hectares	60.000 / 2.500 = 24 hectares	80.000 / 4.000 = 20 hectares

O gráfico que melhor representa a área plantada de algodão de 1995 a 1999 deve decrescer de 95 a 96, crescer de 96 a 98 e decrescer novamente de 98 a 99. O único gráfico que apresenta essas características é o gráfico da alternativa A.

6. b

Em uma função $f : A \rightarrow B$ "TODOS" os elementos do conjunto A devem ter um valor correspondente no conjunto B, então:

$f(-10) = f(10) = (\pm 10)^2 + 100 = 100 + 100 = 200$

$f(-20) = f(20) = (\pm 20)^2 + 100 = 400 + 100 = 500$

$f(-20) = f(20) = (\pm 20)^2 + 100 = 400 + 100 = 200$

$f(-30) = f(30) = (\pm 30)^2 + 100 = 900 + 100 = 1000$

$f(0) = (0)^2 + 100 = 100$

Logo, o conjunto imagem é: Im = {100, 200, 500 1000}

7. d

Nas medições feitas antes e 2h após, a liberação de GH foi a mesma.

8. e

Como já explicado no enunciado, uma função injetora possui somente uma valor de x para cada valor de y e vice e versa; e isso só pode ser encontrado na opção e, pois, todas as outras possuem 2 valores de x para um y ou 2 valores de y para um x.

9. a

Das afirmativas temos:
I. Função f: bijetora, pois cada x possui seu próprio y e não sobra nenhum valor do contradomínio
II. Função g: Sobrejetora , pois seu gráfico apresenta um intervalo constante (reta paralela ao eixo x). Logo há mais de um x com a mesma imagem. Além disso, todo o intervalo [p,q] possui correspondente;
III. Função h: Possui também uma reta paralela ao eixo x, entretanto, há elementos do intervalo [p,q] sem correspondentes. Logo não é injetiva.

10. d

Em “Q” paga-se menos, quando a curva do gráfico está abaixo do outro, isso acontece quando o intervalo da quilometragem está entre 0 e 20 e 100 e 160.