Potenciação

Teoria

A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, considere a multiplicação $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, podemos escrever essa multiplicação como $2^4 = 16$, essa operação chamamos de potenciação, nesse caso o número 2 é a base, o número 4 o expoente e o número 16 é a potência.

Exemplos:

1) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
2) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

A multiplicação de fatores iguais representado por a^n onde a é a base e n é o expoente, o expoente indica a quantidades de fatores que serão multiplicados (nesse caso n fatores). Exemplo: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

As propriedades básicas da potenciação são:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

  No produto de potências de mesma base, conserva-se a base e soma os expoentes.

  Exemplo: $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

- $a^m : a^n = a^{m-n}$

  Na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtrai os expoentes.

  Exemplo: $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$

- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

  Na potenciação de uma potência, conserva-se a base e multiplica os expoentes.

  Exemplo: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

  Potência de uma multiplicação ou de uma divisão, conserva-se as bases e distribui o mesmo expoente nas bases.

  Exemplo: $(2 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 4^2$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

  Exemplo: $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2}$

- $a^0 = 1$

  Todo número com elevado ao expoente igual a zero, o resultado sempre será 1.

- $a^1 = a$

  Todo número elevado ao expoente 1, o resultado será sempre o número da base.

- $1^m = 1$

  O número 1 elevado a qualquer expoente sempre resultará em 1.

- $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$

  Exemplo: $2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

  Exemplo: $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3}$

Notação científica

Serve para representar grandezas muito grandes ou muito pequenas a partir de potências de 10. A fórmula da notação científica é: $m \cdot 10^n$, onde m é a mantissa, ou seja, um número racional maior que 1 e menor que 10 e n represente algum número inteiro que é a potência de 10, também chamado ordem de grandeza.

Por exemplo:

$$250000 = 2{,}5 \cdot 10^5$$
$$0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}$$

Exercícios

1. Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos. Esse tempo, em segundo, escrito em notação científica é

a) $0{,}4318 \times 10^2$

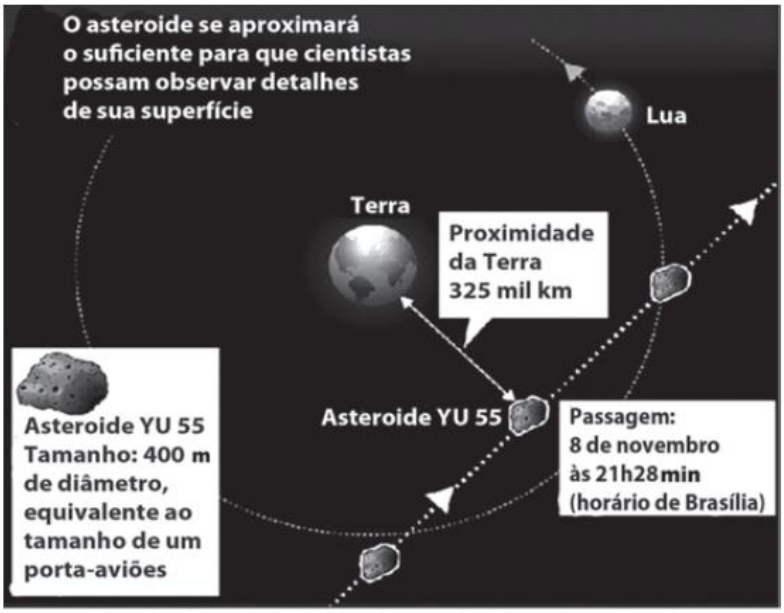
b) $4{,}318 \times 10^1$

c) $43{,}18 \times 10^0$

d) $431{,}8 \times 10^{-1}$

e) 4.318×10^{-2}

2. A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Fonte: NASA AFP

Disponível em: http://noticias.terra.com.br (adaptado).

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

a) $3{,}25 \times 10^2$ km.

b) $3{,}25 \times 10^3$ km.

c) $3{,}25 \times 10^4$ km.

d) $3{,}25 \times 10^5$ km.

e) $3{,}25 \times 10^6$ km.

3. A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus *influenza*. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões.

O vírus *influenza* é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

(Disponível em: www.gripenet.pt. Acesso em: 2 nov. 2013 (adaptado).)

Em notação científica, o diâmetro interno do vírus influenza, em mm, é

a) $1{,}1 \times 10^{-1}$

b) $1{,}1 \times 10^{-2}$

c) $1{,}1 \times 10^{-3}$

d) $1{,}1 \times 10^{-4}$

e) $1{,}1 \times 10^{-5}$

4. Considere $a = 11^{50}$, $b = 4^{100}$ e $c = 2^{150}$ e assinale a alternativa correta.

a) $c < a < b$

b) $c < b < a$

c) $a < b < c$

d) $a < c < b$

5. Considere que o corpo de uma determinada pessoa contém 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue. Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa é (use que 1L=dm³= 10^6 mm³):

a) $2{,}75.10^{9}$

b) $5{,}5.10^{10}$

c) 5.10^{11}

d) $5{,}5.10^{12}$

e) $2{,}75.10^{13}$

6. A fração $\frac{2^{98}+4^{50}-8^{34}}{2^{99}-32^{20}+2^{101}}$ é igual a:

a) 1

b) $-\frac{11}{6}$

c) 2

d) $-\frac{5}{2}$

e) $\frac{7}{4}$

7. A expressão

$$\frac{(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}}$$

é igual a :

a) $\frac{3150}{17}$
b) 90
c) $\frac{1530}{73}$
d) $\frac{17}{3150}$
e) − 90

8. Se $5^{3a} = 64$, o valor de 5^{-a}é:

a) 1/4
b) 1/40
c) -1/4
d) 1/20

9. No século III, o matemático grego Diofante idealizou as seguintes notações das potências:
x – para expressar a primeira potência;
xx – para expressar a segunda potência;
xxx – para expressar a terceira potência.
No século XVIII, o pensador e matemático francês René Descartes (1596 – 1650) introduziu as notações x , x^2 , x^3 para potências, notações que usamos até hoje.

(Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI JR. A conquista da matemática. 8 ed. São Paulo: FTD, 2002.)

Analise as igualdades abaixo:

I. $\left(x^3y^4\right)^4 = x^{12}y^{16}$

II. $-5^0 + 3^0 - (-4)^0 = 1$

III. $\dfrac{2^0 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - 3^0} = -2$

IV. $\left(4^0 + 4^{-1}\right) \div \left(4^0 - 4^{-1}\right) = \frac{5}{3}$

Assinale a alternativa CORRETA.

a) Apenas as igualdades I e II são VERDADEIRAS.
b) Apenas as igualdades I, III e IV são VERDADEIRAS.
c) Apenas as igualdades II e IV são VERDADEIRAS.
d) Apenas a igualdade IV é VERDADEIRA.
e) Todas as igualdades são VERDADEIRAS.

10. Sabendo que $x = 20^{100}$ e $y = 400^{50}$ pode-se afirmar que:

Assinale a alternativa correta:

a) x é igual a y.

b) x é a metade de y.

c) x é o dobro de y.

d) x é igual ao quadrado de y.

e) x é igual ao quádruplo de y.

Gabarito

1. B

A resposta é $43{,}18 = \frac{43{,}18}{10} \times 10 = 4{,}318 \times 10^1$.

2. D

Utilizando a ideia de notação científica, temos: 325 mil km = 325 . 10^3 km = 3,25 . 10^2 . 10^3 = 3,25 . 105 km.

3. D

Colocando em notação científica o diâmetro dado, temos que terá que seguir a seguinte regra: $m \cdot 10^n$, onde m é a mantissa, ou seja, um número racional maior que 1 e menor que 10 e n represente algum número inteiro que é a potência de 10.

$$0{,}00011\ mm\ =\ 0{,}00011\ .\frac{10^4}{10^4}\ = \frac{1{,}1}{10^4} =\ 1{,}1\ \cdot\ 10^{-4}\ mm.$$

4. A

Temos $a\ =\ 11^{50}, b\ =\ 4^{100}\ e\ c\ =\ 2^{150}$

Colocando todos com o mesmo expoente para assim comparar, temos

Usando a propriedade de potência $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, temos

$$b\ =\ 4^{100} = 4^{2 \cdot 50} = (4^2)^{50} = 16^{50}$$
$$c\ =\ 2^{150} = 2^{3 \cdot 50} = (2^3)^{50} = 8^{50}$$

Como agora temos $a\ =\ 11^{50}, b\ = 16^{50}\ e\ c\ = 8^{50}$, podemos dizer que

$$c < a < b$$

5. E

O corpo de um pessoal contém $5{,}5\ L$ que equivale a $5{,}5$ dm³ que equivale a $5{,}5 \cdot 10^6$ mm³.Logo, temos que $5{,}5\ L = 5{,}5$ dm³ = $5{,}5 \cdot 10^6$ mm³.

E 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue, ou seja, 5 milhões = $5\ 000\ 000 = 5 \cdot 10^6$.

Como a pessoa tem $5 \cdot 10^6$ glóbulos vermelhos a cada 1 mm³ de sangue, podemos armar a seguinte regra de três:

1 mm³ de sangue $-$ $5 \cdot 10^6$ glóbulos vermelhos

$5{,}5 \cdot 10^6$ mm³ de sangue – x glóbulos vermelhos

Multiplicando cruzado, temos

$$x = 5 \cdot 10^6 \cdot\ 5{,}5 \cdot 10^6 = 27{,}5 \cdot 10^{12}$$

Colocando em notação científica, temos:

$$27{,}5 \cdot 10^{12} \cdot \frac{10}{10} = \frac{27{,}5}{10} \cdot 10^{12} \cdot 10 = 2{,}75 \cdot 10^{13}\ glóbulos\ vermelhos$$

6. B

Usamos as seguintes propriedades de potência:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Temos

$$\frac{2^{98} + 4^{50} - 8^{34}}{2^{99} - 32^{20} + 2^{101}} = \frac{2^{98} + (2^2)^{50} - (2^3)^{34}}{2^{99} - (2^5)^{20} + 2^{101}} = \frac{2^{98} + 2^{100} - 2^{102}}{2^{99} - 2^{100} + 2^{101}} = \frac{2^{98} + 2^{98+2} - 2^{98+4}}{2^{99} - 2^{99+1} + 2^{99+2}}$$
$$\frac{2^{98} + 2^{98} \cdot 2^2 - 2^{98} \cdot 2^4}{2^{99} - 2^{99} \cdot 2 + 2^{99} \cdot 2^2} = \frac{2^{98}(1 + 2^2 - 2^4)}{2^{99}(1 - 2 + 2^2)} = \frac{1 \cdot (-11)}{2 \cdot 3} = -\frac{11}{6}$$

7. C

$$\frac{(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{25 - 9 + 1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{17}{\frac{10 + 18 + 45}{90}} = \frac{17}{\frac{73}{90}} = 17 \cdot \frac{90}{73} = \frac{1530}{73}$$

8. A

Usando as propriedades de potência

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$
$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$5^{3a} = 64 \Leftrightarrow (5^a)^3 = 4^3 \Leftrightarrow 5^a = 4$, elevando a -1, temos, $(5^a)^{-1} = 4^{-1}$ logo $5^{-a} = \frac{1}{4}$

9. B

Usando as propriedades de potência:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Então:

Está correta, pois $(x^3y^4)^4 = x^{3 \cdot 4}y^{4 \cdot 4} = x^{12}y^{16}$

Está incorreta, pois $-5^0 + 3^0 - (-4)^0 = -1 + 1 - 1 = -1$

Está correta, pois $\frac{2^0 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - 3^0} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{12}{6} = -2$

Está correta, pois $(4^0 + 4^{-1}) \div (4^0 - 4^{-1}) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) \div \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{3}$

10. A

Reescrevendo x e y, temos

Usando as propriedade de potência:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Então,

$$x = 20^{100} = (2 \cdot 10)^{100} = 2^{100} \cdot 10^{100}$$
$$y = 400^5 = (4 \cdot 100)^{50} = (2^2 \cdot 10^2)^{50} = ((2 \cdot 10)^2)^{50} = (2 \cdot 10)^{100} = 2^{100} \cdot 10^{100}$$

Portanto, $x = y$.