

## Determinantes: propriedades

### Resumo

---

#### Propriedades dos determinantes

##### Matriz transposta:

$$\text{Det } A^t = \text{det } A$$

##### Casos em que o determinante é nulo:

- Quando todos os elementos de uma fila ( linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

- Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

- Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} a & b & 2a + 3b \\ c & d & 2c + 3d \\ e & f & 2e + 3f \end{vmatrix} = 0$$

##### Troca de fileiras:

Ao trocarmos duas fileiras de uma matriz quadrada, seu determinante fica multiplicado por -1.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = K \qquad \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -K$$

##### Multiplicação de uma fila por uma constante:

---

Multiplicando toda uma fileira por uma constante real, o determinante dessa matriz fica multiplicado pela mesma constante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = K \qquad \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha K$$

Já se multiplicarmos todos os elementos da matriz por uma constante real  $\alpha$ , temos que:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$$

em que  $n$  é a ordem da matriz.

- $\det(A.B) = \det A \cdot \det B$
- $\det(A^n) = (\det A)^n$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Ou seja, o determinante da matriz inversa é o inverso do determinante da matriz.

Sendo assim, fica fácil reparar que, se uma determinada matriz tiver determinante valendo 0, então ela não é inversível.

## Exercícios

---

1. Sejam A, B e C matrizes reais 3x3, tais que  $A \cdot B = C^{-1}$ ,  $B = 2A$  e  $\det C = 8$ . Então,  $|\det A|$  vale:

- a)  $\frac{1}{16}$
- b)  $\frac{1}{8}$
- c) 1
- d) 8
- e) 16

2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

É correto afirmar que o determinante da matriz A.B é

- a) 32
  - b) 44
  - c) 51
  - d) 63
3. Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 com  $\det(A) = 3$  e se k é um número real tal que  $\det(kA) = 192$ , então o valor de k é:
- a) 4
  - b) 8
  - c) 32
  - d) 64
  - e) 96

4. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 2 & \sin\theta \\ 3 & 1 & 3 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ . Sabendo-se que  $\sin\theta = -\cos\theta$ , em que

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ , o determinante da matriz inversa de A, indicado por  $\text{Det } A^{-1}$ , vale:

- a) -1.
- b) 0.
- c) 1.
- d) 2.
- e) -5.

5.  $M$  é uma matriz quadrada de ordem 3, e seu determinante é  $\det M = 2$ .  
O valor da expressão  $\det M + \det (2M) + \det (3M)$  é:
- a) 12
  - b) 15
  - c) 36
  - d) 54
  - e) 72
6. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $3 \times 3$  tais que  $\det A = 3$  e  $\det B = 4$ . Então  $\det(A \cdot 2B)$  é igual a:
- a) 32.
  - b) 48.
  - c) 64.
  - d) 80.
  - e) 96.
7. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 2 com determinante maior que zero e  $A^{-1}$  a sua inversa. Se  $16 \cdot \det A^{-1} = \det (2A)$ , então o determinante de  $A$  vale:
- a) 4.
  - b) 6.
  - c) 8.
  - d) 2.
  - e) 16.
8. Sendo  $A$  uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 6, qual o valor de  $x$  na equação  $\det(2A \cdot A^{-1}) = 4x$ ?
- a) 72
  - b) 18
  - c) 12
  - d) 2
  - e)  $\frac{1}{2}$

9.  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 2 e  $\det(A) = 7$ . Nessas condições,  $\det(3A)$  e  $\det(A^{-1})$  valem, respectivamente:
- a) 7 e  $-7$ .
  - b) 21 e  $1/7$ .
  - c) 21 e  $-7$ .
  - d) 63 e  $-7$ .
  - e) 63 e  $1/7$ .

10. Considere a matriz quadrada de ordem 3,  $A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$ , onde  $x$  é um número real.

Podemos afirmar que:

- a)  $A$  não é invertível para nenhum valor de  $x$ .
- b)  $A$  é invertível para um único valor de  $x$ .
- c)  $A$  é invertível para exatamente dois valores de  $x$ .
- d)  $A$  é invertível para todos os valores de  $x$ .

## Gabarito

---

1. **B**

Se  $B = 2A$ , então  $\text{Det } B = \text{Det } 2A$ .

Como  $A$  é de ordem 3, então  $\text{Det } 2A = 2^3 \text{Det } A = 8 \text{Det } A$ , logo  $B = 8 \text{Det } A$

Se  $\text{Det } C = 8$ , então  $\text{Det } C^{-1} = \frac{1}{8}$ .

Se  $A \cdot B = C^{-1}$ , então

$$\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det } C^{-1}$$

$$\text{Det } A \cdot \text{Det } B = \text{Det } C^{-1}$$

$$\text{Det } A \cdot 8 \text{Det } A = \frac{1}{8}$$

$$\text{Det}^2 A = \frac{1}{64}$$

$$\text{Det } A = \pm \sqrt{\frac{1}{64}} = \pm \frac{1}{8}$$

Como se deseja  $|\text{det } A| = \frac{1}{8}$ .

2. **B**

$$\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det } A \cdot \text{Det } B$$

$$\text{Det } A = 11, \text{Det } B = 4$$

$$\text{Det } (A \cdot B) = 11 \cdot 4 = 44$$

3. **A**

$$\text{Det}(k \cdot A) = k^3 \cdot \text{Det } A = k^3 \cdot 3 = 192$$

$$k^3 = 64$$

$$k = 4$$

4. **C**

Calculando o determinante pela Regra de Sarrus:

$$\text{Det } A = \cos^2 \theta - 6 \text{sen} \theta + 0 + \text{sen}^2 \theta - 6 \cos \theta$$

$$\text{sen} \theta = -\cos \theta$$

$$\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 + 6 \text{sen} \theta - 6 \text{sen} \theta = 1$$

$$\text{Det } A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} = 1$$

5. **E**

---

$$\text{Det } M = 2$$

$$\text{Det } 2M = 2^3 \cdot 2 = 16$$

$$\text{Det } 3M = 3^3 \cdot 2 = 54$$

$$54 + 16 + 2 = 72$$

6. E

$$\text{Det}(A \cdot 2B) = \text{Det } A \cdot \text{Det } 2B$$

$$3 \cdot 2^3 \cdot 4 = 96$$

7. D

$$\text{Sabendo que } \text{Det } A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A}$$

$$16 \cdot \text{Det } A^{-1} = \text{Det } (2A)$$

$$16 \cdot \frac{1}{\text{Det } A} = 2^2 \cdot \text{Det } A$$

$$\text{Det}^2 A = 4$$

$$\text{Det } A = 2$$

8. D

$$\det(2A \cdot A^{-1}) = 4x$$

$$\det 2A \cdot \det A^{-1} = 4x$$

$$2^3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = 4x$$

$$8 = 4x$$

$$x = 2$$

9. E

$$\text{Det } A = 7$$

$$\text{Det } 3A = 3^2 \cdot 7 = 63$$

$$\text{Det } A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} = \frac{1}{7}$$

10. D

Calculando o determinante pela regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\text{sen } x \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } x & 0 & \cos x \end{bmatrix} \begin{matrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \\ \text{sen } x & 0 \end{matrix}$$

$$\cos^2 x + 0 + 0 + \text{sen}^2 x + 0 + 0 = 1$$

Como  $\text{Det } A \neq 0$ , para todos os valores de  $x$ , logo é invertível para todos os valores de  $x$ .