Métodos de resolução de sistemas lineares

Resumo

Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares é simplesmente um conjunto de equações lineares.
Definição: Um sistema de m equações lineares em n variáveis (ou incógnitas) é um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 \dots + a_{mn}x_n = b \end{cases}$$

onde a_{ij}, b_k para i = 1, ..., m, j = 1, ..., n e k = 1, ..., m, são constantes reais, chamados os coeficientes do sistema.

Operações Elementares:

1. Trocar duas equações do sistema de posição.
2. Substituir uma equação pela mesma equação multiplicada por um escalar diferente de 0.
3. Substituir uma equação pela mesma equação somada a outra equação multiplicada por um escalar.

Método de escalonamento

Um sistema linear é dito escalonado se a última linha tiver apenas uma incógnita, a penúltima duas, e assim sucessivamente até a primeira linha onde terão todas as incógnitas. Segue exemplo de um sistema escalonado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Procedimentos para escalonar um sistema

- Fixamos como 1ª equação uma das que possuam o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.
- Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações.
- Anulamos todos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação.
- Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Exemplo:

Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x + 16z = 4 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método de escalonamento.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 & \times(-3) \\ 2x + 3y - z = 0 & \times(2) \\ \quad x - 14z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -3x - 6y - 12z = 0 \\ \underline{4x + 6y - 2z = 0} \\ x - 14z = 0 \;\; (substitua\, na\, segunda\, equação) \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ \boldsymbol{x - 14z = 0} \\ \boldsymbol{-x + 16z = 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \\ \boldsymbol{2z = 4} \end{cases}$$

Método da substituição

Solução de sistemas pelo método da substituição.

Passo 1: Escolher uma incógnita e calcular seu valor algébrico.

Passo 2: Substituir o valor algébrico da incógnita na outra equação.

Passo 3: Calcular o valor numérico de uma das incógnitas.

Passo 4: Substituir o valor numérico de x em qualquer uma das duas equações e encontrar o valor numérico de y.

Exemplo: Encontre a solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 6x + 4y = 38 \end{cases}$$

Solução: Primeiramente, escolha uma incógnita para isolar. Para esse sistema, isolaremos y na primeira equação. Observe os cálculos na seguinte imagem:

$$\left\{\begin{array}{c} \underline{4x - y = 18} \\ 6x + 4y = 38 \end{array}\right\}$$

$$4x + y = 18$$
$$-y = 18 - 4x$$
$$y = -18 + 4x$$

Por meio dos passos 2 e 3, substitua y na outra equação e encontre o valor numérico de x, como na imagem:

$$6x + 4y = 38$$
$$6x + 4(-18 + 4x) = 38$$
$$6x - 72 + 16x = 38$$
$$6x + 16x = 38 + 72$$
$$22x = 110$$
$$x = \frac{110}{22}$$
$$x = 5$$

Após encontrar o valor numérico de x, escolha uma das equações para cumprir o quarto e último passo: obter o valor numérico de y. Escolhemos, para isso, a primeira equação. Observe:

$$4x - y = 18$$
$$4 \cdot 5 - y = 18$$
$$20 - y = 18$$
$$-y = 18 - 20$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$

A solução desse sistema é S = {5, 2}.

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções. Podemos ter:

- **Sistema possível e determinado (SPD): tem apenas uma solução.**

O sistema $\begin{cases} -x + y = 5 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$ é possível e determinado pois o par ordenado (1,6) é sua única solução.

- **Sistema possível indeterminado (SPI): tem infinitas soluções.**

O sistema $\begin{cases} 5x - 5y + 5z = 10 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ apresenta infinitas soluções como por exemplo: (1,1,2), (0,2,4), (1,0,1), …. .

- **Sistema Impossível (SI): não tem solução.**

O sistema $\begin{cases} x-y=-3 \\ x-y=5 \end{cases}$ não possui nenhum par ordenado que satisfaça as duas equações ao mesmo tempo.

O processo de escalonamento pode também ser utilizado na discussão de sistemas lineares, porém é mais conveniente utilizar o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes aliado ao escalonamento.

1º) Calcula-se o determinante;

- Se o determinante for diferente de zero, temos as condições dos parâmetros para que o sistema seja SPD;

2º) Assumimos o determinante igual a zero e substituímos no sistema;

3º) Escalonamos o sistema obtido até a última linha;

Exemplo:

Discuta o sistema $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$

1º) Calculamos o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = a - 2$$

Se $D \neq 0 \rightarrow a \neq 2$, teremos SPD (Sistema Possível e Determinado)

2º) Assume D=0, logo a=2 e substituímos no sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$$

Resolvendo temos que $b = {}^{1}/_{2}$

Logo, temos

$a \neq 2 \rightarrow$ SPD

$a = 2\ e\ b = {}^{1}/_{2}$ →SPI

$a = 2\ e\ b \neq {}^{1}/_{2}$ →SI

Exercícios

1. Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R$ 3 800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R$ 3 400,00. A televisão mais a estante sairiam por R$ 4 200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista.
O valor total, em real, pago pelo cliente foi de
a) 3 610,00.
b) 5 035,00.
c) 5 415,00.
d) 5 795,00.
e) 6 100,00.

2. Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.
Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi
a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

3. Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores.

Disponível em: www.techlider.com.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

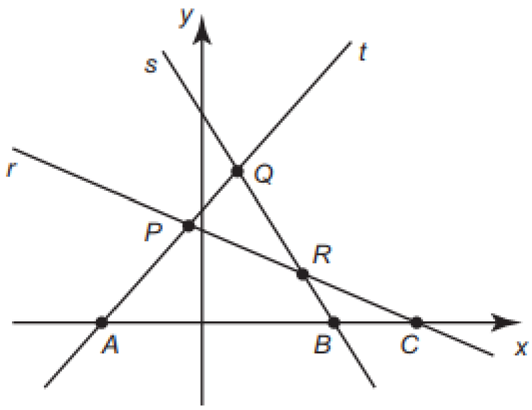
O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é

a) 200.
b) 209.
c) 270.
d) 340
e) 475.

4. A prefeitura de uma cidade detectou que as galerias pluviais, que possuem seção transversal na forma de um quadrado de lado 2m, são insuficientes para comportar o escoamento da água em caso de enchentes. Por essa razão, essas galerias foram reformadas e passaram a ter seções quadradas de lado igual ao dobro das anteriores, permitindo uma vazão de 400m3/s. O cálculo da vazão V (em m3/s) é dado pelo produto entre a área por onde passa a água (em m2) e a velocidade da água (em m/s).
Supondo que a velocidade da agua não se alterou, qual era a vazão máxima?

a) $25m^3/s$
b) $50m^3/s$
c) $100m^3/s$
d) $200m^3/s$
e) $300m^3/s$

5. Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C s pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.
b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.
c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.
d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.
e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

6. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função

$$T(h) = A + B\,sen\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right),$$

, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) A = 18 e B = 8
b) A = 22 e B = -4
c) A = 22 e B = 4
d) A = 26 e B = -8
e) A = 26 e B = 8

7. Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30
b) 36
c) 50
d) 60
e) 64

8. Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) 5X − 3 Y + 15 = 0
b) 5X − 2Y + 10 = 0
c) 3X − 3Y + 15 = 0
d) 3X − 2Y + 15 = 0
e) 3X − 2Y + 10 = 0

9. Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes a seca. Em média, para cada 100g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias do dois micronutrientes para uma pessoa é de aproximadamente 12,25mg de ferro e de 10mg de zinco.

Disponível em http://www.empraba.br. Acesso em: 29 de abril de 2010. (adaptado)

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os nutrientes oriundos desses alimentos. Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

a) 58 g e 456 g.
b) 200 g e 200 g.
c) 350 g e 100 g.
d) 375 g e 500 g.
e) 400 g e 89 g.

10. Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano.

O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

Gabarito

1. D

Sejam t, s e e, respectivamente, o preço de uma televisão, o preço de um sofá e o preço de uma estante. Logo, vem

$$\begin{cases} t+s=3800 \\ s+e=3400 \\ t+e=4200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+s=3800 \\ t-s=800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2300 \\ s=1500 \end{cases}.$$

A resposta é

$0{,}95 \cdot (2 \cdot 2300 + 1500) = \text{R\$ } 5.795{,}00.$

2. A

Calculando:

$P(t) = A + B\cos(kt)$

$$\begin{cases} A + B \cdot \cos(kt) = 120 \\ A - B \cdot \cos(kt) = 78 \end{cases} \Rightarrow 2A = 198 \Rightarrow A = 99$$

$P_{máx} \Rightarrow \cos(kt) = 1$

$99 + B = 120 \Rightarrow B = 21$

$$\frac{90 \text{ batimentos}}{60 \text{ segundos}} = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{6}{9}s = \frac{2}{3}s$$

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$$

Assim :

$P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$

3. C

Sejam x a memória ocupada por um minuto de vídeo e y a memória ocupada por uma foto. Logo, temos

$10x + 190y = 15x + 150y \Leftrightarrow x = 8y.$

Portanto, a capacidade total do disco é $10 \cdot 8y + 190y = 270y$ e, assim, o resultado é 270.

4. B

$$\left.\begin{array}{l} V_i = v \cdot \ell^2 = v \cdot 2^2 \Rightarrow V_i = 4v \\ V_f = 400 = v \cdot (2\ell)^2 \Rightarrow 400 = 16v \Rightarrow v = 25 \end{array}\right\rangle \Rightarrow V_i = 4 \cdot 25 = 100 \, m^3/s$$

5. D

É imediato que o sistema não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

6. B

Substituindo os valores na equação por $26°C$ pela manhã, às 6h e $18°C$ às 18h, tem-se:

$$T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$$

$$T(6) = 26 = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(6-12)\right) \to 26 = A + B\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to 26 = A - B$$

$$T(18) = 18 = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(18-12)\right) \to 18 = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \to 18 = A + B$$

$$\begin{cases} A - B = 26 \\ A + B = 18 \end{cases}$$

$$2A = 44 \to A = 22 \to B = -4$$

7. A

Sendo x o número de acertos e y o número de erros, montando um sistema de equações, tem-se:

$$\begin{cases} 20x - 10y = 100 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

$$20x - 10\cdot(80 - x) = 100$$

$$20x - 800 + 10x = 100$$

$$30x = 900$$

$$x = 30$$

8. B

Seja Z o tempo que a luz vermelha fica acesa. Logo, temos

$$X = \frac{2Z}{3} \Leftrightarrow Z = \frac{3X}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} Y = 5 + X + Z &\Leftrightarrow Y = 5 + X + \frac{3X}{2} \\ &\Leftrightarrow 5X - 2Y + 10 = 0. \end{aligned}$$

9. C

Sejam a e f, respectivamente, os números de porções de 100 gramas de arroz e de feijão que deverão ser ingeridas.

De acordo com o enunciado, obtemos o sistema $\begin{cases} 1{,}5a + 7f = 12{,}25 \\ 2a + 3f = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 28f = 49 \\ -6a - 9f = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3{,}5 \\ f = 1 \end{cases}$.

Portanto, as quantidades de arroz e feijão que deverão ser ingeridas são, respectivamente, $3{,}5\cdot 100 = 350\text{ g}$ e $1\cdot 100 = 100\text{ g}$.

10. B

x = número de carros roubados da marca X
y = número de carros roubados da marca Y

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = \dfrac{60}{100}\cdot 150 \end{cases}$$

$$2y + y = 90 \Leftrightarrow y = 30$$

Portanto, o número de carros roubados da marca Y é 30.