

Gravitação

RESUMO

→ Histórico Básico sobre Gravitação

Movimentos dos Corpos Celestes

Desde a Antiguidade, o homem observa o céu, tentando compreender melhor o mundo em que vive. Nessa busca, percebeu que existem fenômenos que se repetem de forma regular e movimentos que podem ser previstos. Veja alguns exemplos:

Sol

- Durante o dia, nasce a Leste e se põe a Oeste;
- Durante o ano, a posição em que ele nasce ou se põe se movimenta lentamente. Da Primavera ao Verão, o Sol nasce e se põe cada vez mais em direção ao Sul e do outono ao inverno, cada vez mais ao norte;
- No verão o Sol fica mais tempo no céu do que no inverno;

Lua

- Nasce a Leste e se Põe a Oeste cada dia num horário diferente. Na Lua Nova ela nasce e se põe quase que no mesmo horário do Sol. A partir da Lua Nova até a próxima Lua Nova ela nasce cada vez mais tarde e se põe cada vez mais tarde;
- Ao longo de 28 dias, pode ser vista desde sem iluminação nenhuma até ficar totalmente iluminada para depois voltar a ficar sem iluminação nenhuma (fases da Lua).

Estrelas

- Movimentam-se no céu como se estivessem presas a uma grande bola (abóbada celeste).
- Movem-se juntas no céu e podem ser agrupadas em constelações;
- Ao longo do ano, as constelações se põem cada vez mais cedo e em um ano repetem o horário em que estão se pondo.

Planetas

- Nascem a Leste e se põem a Oeste em diferentes horários ao longo do ano;
- Ao longo do ano, movem-se em relação às constelações podendo descrever “laços” no céu quando observados em longo prazo (movimento retrógrado).

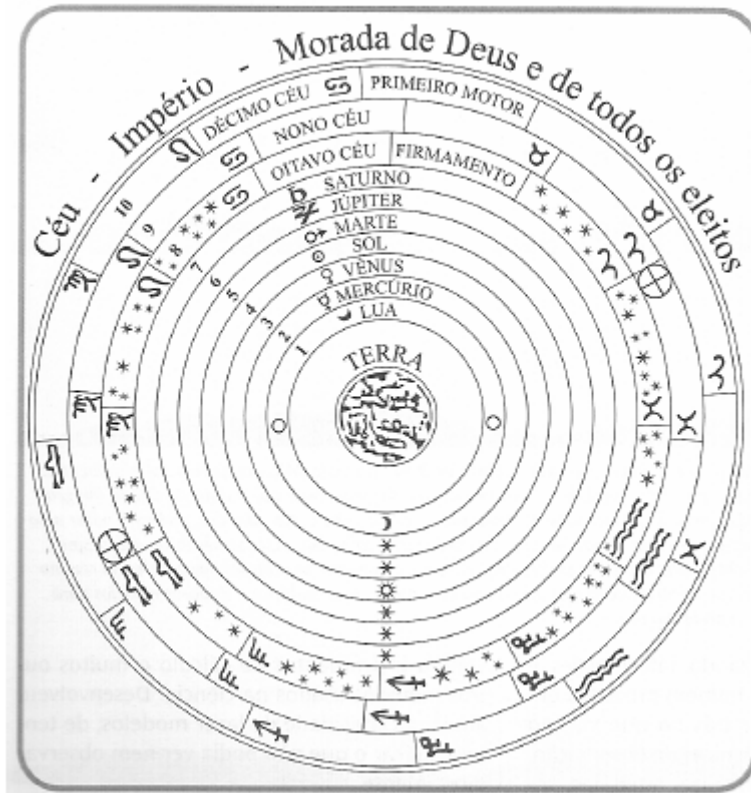
Modelos Planetários

Modelos são conjuntos de ideias e imagens que criamos para explicar certos fenômenos. Por meio de modelos podemos compreender fenômenos já conhecidos, prever novos fenômenos e desenvolver novas hipóteses e teorias. A seguir, vamos estudar alguns modelos que foram criados ao longo da História para explicar os movimentos dos corpos celestes:

Modelo Planetário: Características Principais

Aristóteles (Modelo dos Gregos)
Século IV a.C.

- A Terra está imóvel no centro do Universo (modelo geocêntrico);
- O Sol, a Lua e o resto do universo se movem em torno da Terra;
- O movimento dos astros em torno da Terra deve ser circular e uniforme. Problema: Explicar o movimento dos planetas.

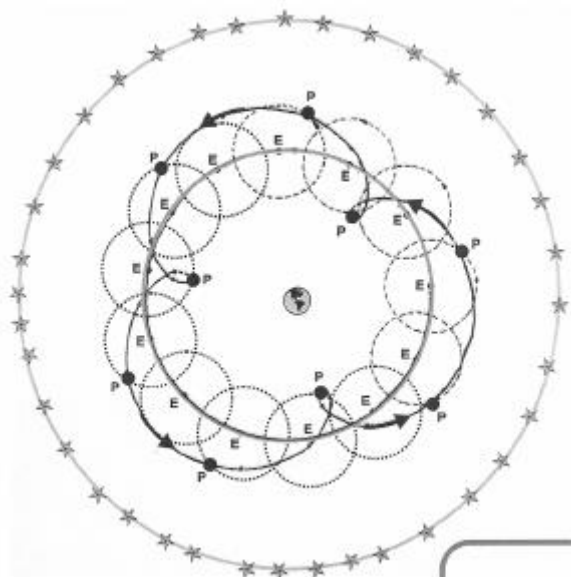


Essa é uma gravura medieval que representa um modelo de universo tal como proposto pelo modelo de Aristóteles.

Claudius Ptolomeu
Alexandria, século II d.C.

Mesmas ideias de Aristóteles:

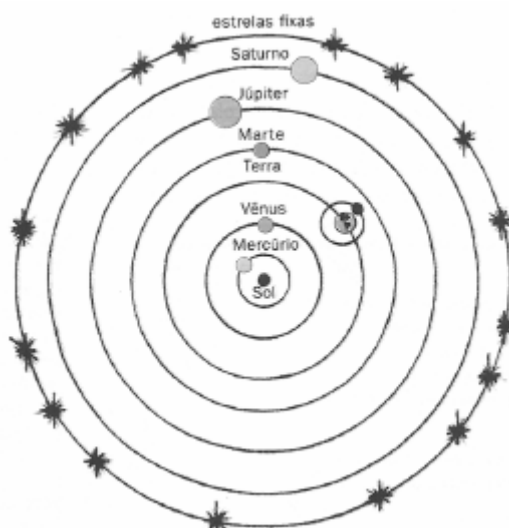
- A Terra está imóvel no centro do Universo (modelo geocêntrico);
- O Sol, a Lua e o resto do universo se movem em torno da Terra;
- O movimento dos astros em torno da Terra deve ser circular e uniforme.
- O movimento dos planetas não é circular mas é uma combinação de movimentos circulares: Com uma correção: Os planetas giram (com movimento circular) em torno de pontos. Cada um desses pontos também gira (com movimento circular) em torno da Terra.



Esquema do modelo de Ptolomeu

Nicolau Copérnico Polonês - Século XVI

- O Sol está imóvel no centro do Universo (modelo heliocêntrico);
- A Terra não é o centro do Universo, mas é o centro de sua própria gravidade;
- A Terra, os planetas e o resto do universo se movem em torno do Sol;
- Os movimentos que aparecem no céu são consequência do movimento de rotação da Terra em torno de si mesma (esse movimento é diário);
- Somente a Lua gira em torno da Terra;
- O movimento dos astros em torno do Sol (e da Lua em torno da Terra) deve ser circular e uniforme.



Esquema do modelo de Copérnico

Obs.: Sinta-se à vontade para fazer uma leitura de lazer e diversão num dia de clima de montanha, tomando aquele chocolate quente, de pijama de moletom e meias coloridas. A obra: A Dança do Universo, de Marcelo Gleiser.

Para quem não sabe, Marcelo Gleiser é um físico, astrônomo, professor, escritor e roteirista brasileiro, atualmente pesquisador da Faculdade de Dartmouth, nos EUA.

Os três modelos acima não foram os únicos a explicar os movimentos dos corpos celestes, mas cada um deles tem a sua importância histórica por representar momentos diferentes na história da humanidade em sua forma de enxergar e estudar o universo. A ideia de universo que temos hoje é bem diferente do modelo de Copérnico. Na verdade, não imaginamos hoje um centro para o universo e descobrimos que o céu é composto por muito mais corpos celestes do que os que eram conhecidos em sua época. Até mesmo a ideia de órbitas circulares foi abandonada já no século XVII pelo astrônomo Johannes Kepler.

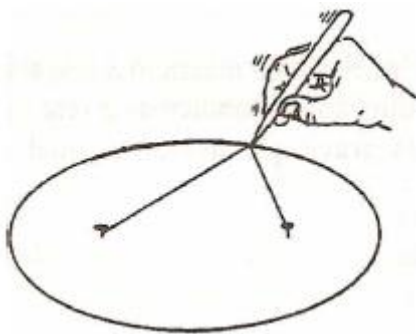
As Leis de Kepler

Baseado em dados astronômicos coletados pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, Kepler formulou leis sobre o movimento dos planetas (ou qualquer corpo celeste que orbite em torno do Sol, como por exemplo os cometas). Essas leis mostram que, em relação ao Sol, os planetas apresentam uma série de regularidades e que seus movimentos são muito mais simples de serem descritos em relação ao Sol do que em relação à Terra. Foram leis empíricas (fruto de observações), sem nenhuma teoria para apoiá-las, mas que tiveram grande importância para a substituição do modelo geocêntrico pelo heliocêntrico. Anos depois de Kepler formulá-las, Newton as utilizou como base experimental para a formulação da sua teoria da gravitação e pôde "explicá-las" teoricamente. E, apesar de hoje possuírem apenas um interesse histórico, vale a pena conhecê-las.

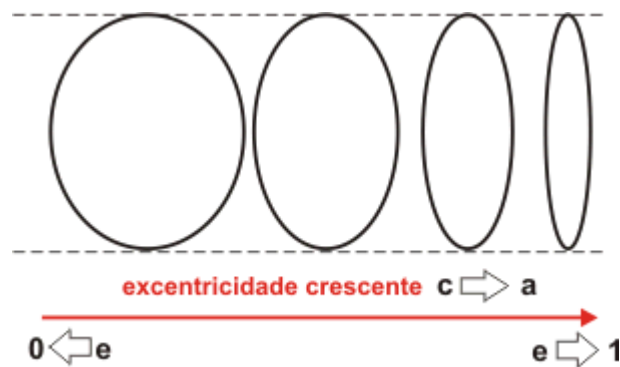
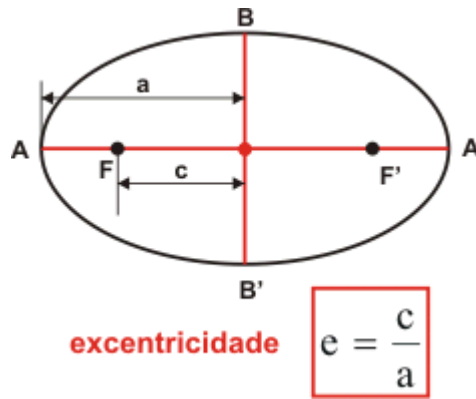
→ 1ª Lei de Kepler

“Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, o qual ocupa um dos focos da elipse.”

Uma elipse é uma figura geométrica um pouco oval que possui dois pontos chamados focos. Se traçarmos uma linha desde um foco até a elipse e da elipse até o outro foco, esta linha terá o mesmo tamanho para qualquer ponto da elipse. Para entender melhor, você pode traçar uma elipse da seguinte forma:

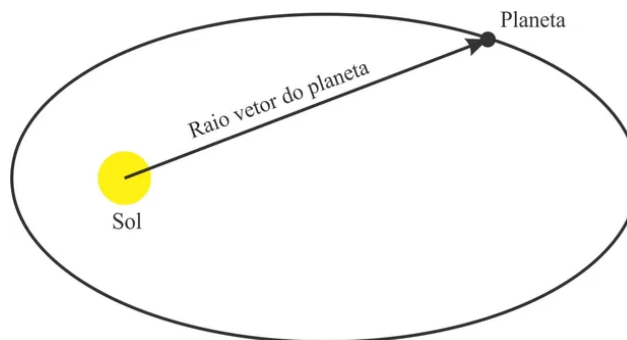


- prenda dois alfinetes (ou pregos) sobre uma prancha de madeira (veja a figura ao lado); amarre as extremidades de um barbante aos alfinetes, e, com um lápis, trace uma curva mantendo o barbante sempre esticado;
- está pronta a elipse; os pontos onde estão os alfinetes são os seus focos.
- se você aproximar os focos (os alfinetes) observará que a elipse fica cada vez mais parecida com um círculo. As órbitas dos planetas são assim. Com os focos muito próximos e quase circulares.



→ 2ª Lei de Kepler

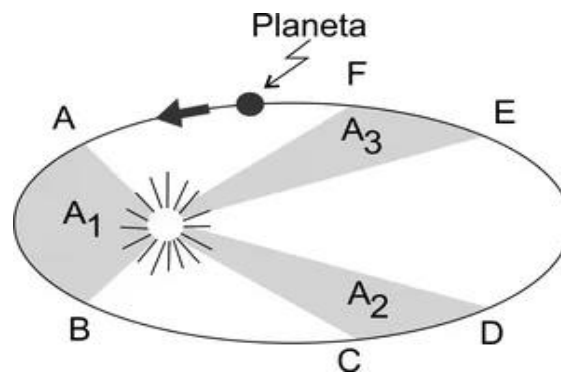
“A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.”



Esta lei determina que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância a que estão do Sol.

→ **Periélio** é o ponto mais próximo do Sol, onde o planeta orbita mais rapidamente.

→ **Afélio** é o ponto mais afastado do Sol, onde o planeta move-se mais lentamente.



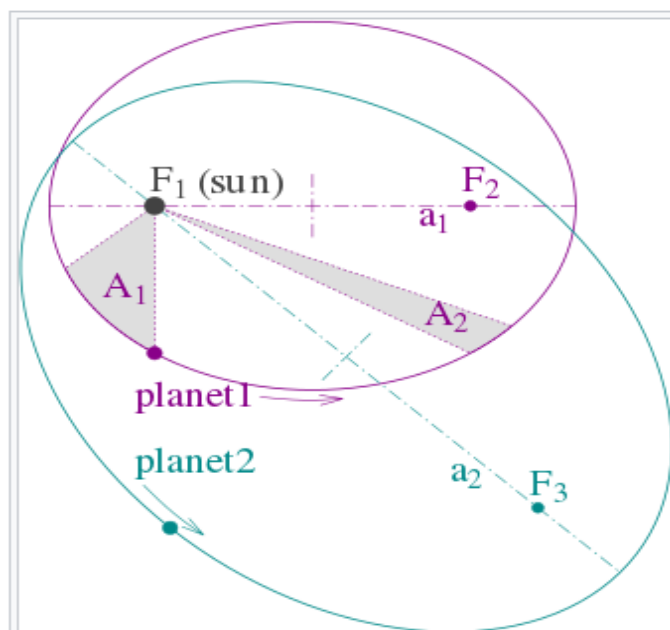
→ 3ª Lei de Kepler

“Os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas.”

Ou seja, sendo T o período de revolução (ano do planeta) e R o semi-eixo maior da órbita de um planeta, tem-se:

$$\frac{T^2}{R^3} = k, \text{ com } k \text{ sendo uma constante.}$$

Esta lei indica que existe uma relação entre a distância do planeta e o período de translação (tempo que ele demora para completar uma revolução em torno do Sol). Portanto, quanto mais distante estiver do Sol mais tempo levará para completar sua volta em torno desta estrela.

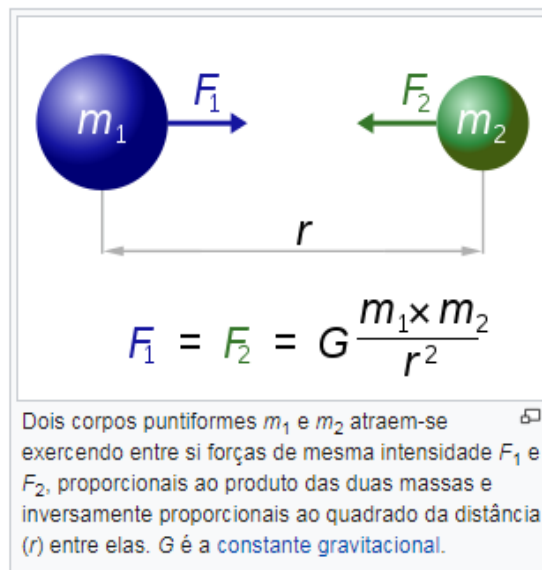


As leis de Kepler, com duas órbitas planetárias:

1. As órbitas são elipses, com pontos focais f_1 e f_2 para o **planeta 1** e f_1 e f_3 para o **planeta 2**. O Sol está no ponto focal f_1 .
2. Os dois setores sombreados A_1 e A_2 possuem a mesma área superficial e o tempo para o **planeta 1** percorrer o segmento A_1 é igual ao tempo para percorrer o segmento A_2 .
3. A relação entre os períodos dos planetas 1 e 2 está na proporção $a_1^{3/2} : a_2^{3/2}$.

→ Lei da Gravitação Universal

Se dois corpos possuem massa, ambos sofreram uma força de atração mútua proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade.



Obs.:

Corpos de simetria esférica e a gravitação.

As partículas dos corpos que possuem uma distribuição de massa simetricamente esférica, como estrelas, luas e planetas, tendem a se aproximar do centro de massa. Assim, um acumulado de poeira cósmica ao aglutinar-se, as partículas começam a se aproximar de forma uniforme, pois quanto mais acumuladas, mais força têm para comprimi-las. Por isso os corpos geralmente assumem uma forma esférica, visto que, quando sua massa é pequena esse efeito é bastante baixo e os corpos podem ter alterações em seus formatos.

Formulação da lei

Se os corpos não são de partículas ou não podem ser considerados como pontos materiais, a distância estabelecida entre elas deve ser medida em relação ao centro de massa delas, ou seja, pontos onde pode-se supor que está concentrada toda a massa do corpo ou o sistema de corpos.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \|\vec{F}\| \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Onde,

$\mathbf{F}_1$ ($\mathbf{F}_2$) é a força, sentida pelo corpo 1 (2) devido ao corpo 2 (1), medida em newtons;

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ é constante gravitacional universal, que determina a intensidade da força,

m_1 e m_2 são as massas dos corpos que se atraem entre si, medidas em quilogramas; e

r é a distância entre os dois corpos, medida em metros;

$\hat{r}$ o versor do vetor que liga o corpo 1 ao corpo 2.

A constante gravitacional universal foi medida anos mais tarde por Henry Cavendish. A descoberta da lei da gravitação universal se deu em 1685 como resultado de uma série de estudos e trabalhos iniciados muito antes.

O estabelecimento de uma lei de gravitação, que unifica todos os fenômenos terrestres e celestes de atração entre os corpos, teve enorme importância para a evolução da ciência moderna.

→ Forças Centrais

É uma força cuja magnitude depende somente da distância r do objeto à origem e é dirigida ao longo da linha que os une

$$\vec{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(|\mathbf{r}|)\hat{\mathbf{r}}$$

onde F é a força, $\mathbf{F}$ é o vetor função de força, F é um escalar cujo valor é a função de força, $\mathbf{r}$ é o vetor posição, $|\mathbf{r}|$ é o seu comprimento, e $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ é o vetor unitário correspondente.

Equivalentemente, um campo de força é central se, e somente se, ele possui simetria esférica.

Propriedades

Um campo de forças centrais é um campo conservativo, isto é, pode sempre ser expresso como o negativo do gradiente de um potencial:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}), \text{ onde } V(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{r}|}^{+\infty} F(r) dr$$

(O limite superior de integração é arbitrário, pois o potencial é definido a menos de uma constante aditiva).

Em um campo conservativo, a energia mecânica total (cinética e potencial) é conservada:

$$E = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(\mathbf{r}) = \text{constante}$$

(Onde $\dot{\mathbf{r}}$ denota a derivada de $\mathbf{r}$ em relação ao tempo, que é a velocidade). Num campo de força central, o momento angular também se conserva:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = \text{constante}$$

pois o torque exercido pela força central é nulo. Como consequência, o corpo se move no plano perpendicular ao vetor momento angular, contendo a origem, e obedece a segunda lei de Kepler. (Se o momento angular é zero, o corpo se move ao longo da linha que o une à origem).

Uma consequência de ser conservativo, um campo de força central é **irrotacional**, isto é, seu rotacional é zero, **exceto na origem**:

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

→ Energia Potencial Gravitacional

Corpos pontuais:

Sabe-se que o campo das forças gravitacionais entre dois corpos pontuais 1 e 2, cuja posição relativa e o vetor $\vec{r}$ é:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

onde G representa a constante de gravitação universal, m_1 e m_2 representam as massas em interação, $\vec{r}$ representa o vetor que localiza uma das massas em relação à outra e $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ representa o módulo (tamanho) do vetor $\vec{r}$, ou seja, a distância entre as massas.

Sendo o campo gravitacional um campo conservativo, é possível definir o seu potencial como uma função $U(r)$ tal que

$$\nabla U(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r})$$

Partindo da definição e operando em coordenadas cartesianas tem-se que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}, -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}, -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \right)$$

Logo, a função potencial é:

$$U(\vec{r}) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{\|\vec{r}\|}$$

Da expressão acima, é possível perceber que a energia potencial depende da distância entre os dois corpos sem levar em consideração o vetor-posição de um em relação ao outro. Então pode ser escrita como:

$$U(d) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$$

Considerando que se saiba que o campo gravitacional é conservativo, também é possível determinar o potencial através da expressão:

$$\Delta U = - \int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

cujo resultado é igual ao determinado anteriormente.

Corpos extensos:

Para determinar-se a interação gravitacional entre corpos extensos é necessário proceder-se com o cálculo de uma integral de volume sobre os dois corpos a fim de determinar-se a soma das interações gravitacionais entre os infinitos diferenciais de massa nos quais dividem-se os corpos. Tal cálculo mostra-se geralmente dependente da geometria dos corpos, podendo mostrar-se bem complicado em certos casos. Contudo Newton mostrou, com o uso do cálculo diferencial e integral, que pontos externos à uma esfera com

distribuição simétrica de massa encontram-se sujeitos a potenciais gravitacionais por ela determinados que são para todos os efeitos completamente análogos àqueles que seriam determinados por uma partícula pontual localizada no centro da esfera uma vez provido que essa encerre em si massa equivalente à massa de toda a esfera. Nesses termos, Newton demonstrou que a expressão geral acima vale também para corpos esféricos que apresentem distribuições de massa (densidades) com simetria esférica (formado por cascas homogêneas), e a citada expressão pode, a exemplo, ser utilizada para calcular-se a energia potencial armazenada em um sistema formado pelo planeta Terra e pela Lua com excelente aproximação, a exemplo. A distância a considerar-se é, no caso, a distância entre os centros dos astros em questão.

Aproximação para um campo gravitacional uniforme

Considerando o campo gravitacional próximo à superfície da Terra como sendo uniforme (assumindo as linhas de campo paralelas e a gravidade sendo constante em todos os pontos), define-se o campo das forças gravitacionais como sendo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, -mg)$$

Partindo da definição de potencial, calcula-se o potencial, nesse caso, como sendo:

$$U(x, y, z) = mgz$$

Ou seja, o potencial gravitacional pode ser calculado, nessa aproximação, pelo produto do peso (massa vezes gravidade) pela altura em que o corpo se encontra.

$$U(h) = Ph = mgh$$

Nessa aproximação, válida para pequenas variações de altura em torno de um nível de referência, geralmente a superfície da Terra, usa-se necessariamente um determinado nível como referência, sendo comum adotar-se o nível mais baixo no problema como o ponto de energia potencial zero, o nível do solo, a exemplo. Sendo a energia potencial gravitacional uma grandeza escalar cujo valor depende do nível de referência escolhido, é possível que a energia potencial gravitacional seja negativa, marca atingida se o objeto se encontrar abaixo do nível adotado como referência, a exemplo.

A expressão para campos uniformes anterior pode também ser deduzida da expressão geral fazendo-se uma expansão em série da mesma e retendo-se apenas o termo em primeira ordem na altura.

Velocidade de Escape

Para o caso simples do escape de um único corpo, a velocidade de escape é tal que a correspondente energia cinética é igual a menos a energia potencial gravitacional. Isto porque a energia cinética positiva é necessária para aumentar o potencial gravitacional negativo para zero, que é o caso para um objeto a distância infinita.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_e^2 &= \frac{GMm}{r} \\ v_e &= \sqrt{\frac{2GM}{r}}\end{aligned}$$