Função Seno, Cosseno e Tangente

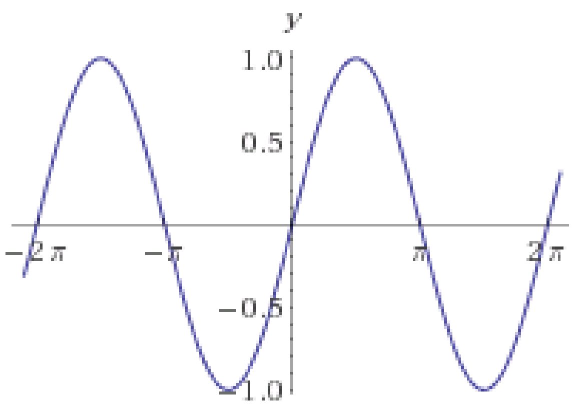
Resumo

Função Seno

A função seno é f: □ $\to$ □ e associa cada número real ao seu seno, ou seja, $f(x) = sen(x)$. Para montar o seu gráfico, é importante saber que o seno varia de -1 a 1, ou seja sua imagem é o intervalo [-1,1], e os valores notáveis:

Ângulo (em radianos)	Seno
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Dessa forma o gráfico, chamado senoide, é da forma:



A função seno é periódica, cujo período principal é igual a 2π.

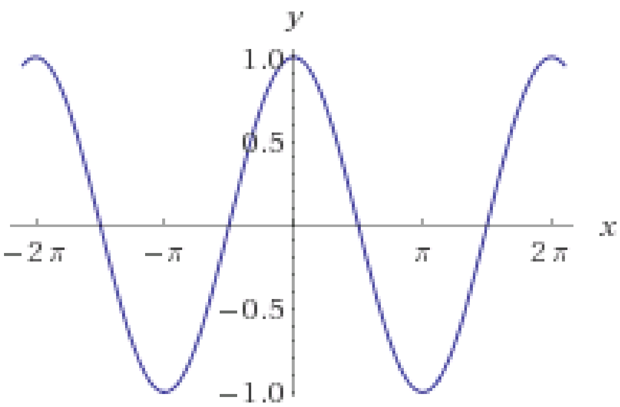
A lei de formação geral da função é $f(x) = a + bsen(cx + d)$.

Função Cosseno

Assim como a função seno, a função cosseno é f: □ $\to$□ e associa cada número real ao seu cosseno, ou seja, $f(x) = \cos(x)$. O cosseno também varia entre -1 e 1, ou seja, sua imagem é o intervalo [-1,1], e seus valores notáveis são:

Ângulo (em radianos)	Cosseno
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Dessa forma o gráfico é uma cossenóide:



Pelo mesmo motivo da função seno, a função cosseno também é periódica e tem período principal 2π.

A lei de formação geral da função é $f(x) = a + b\cos(cx + d)$.

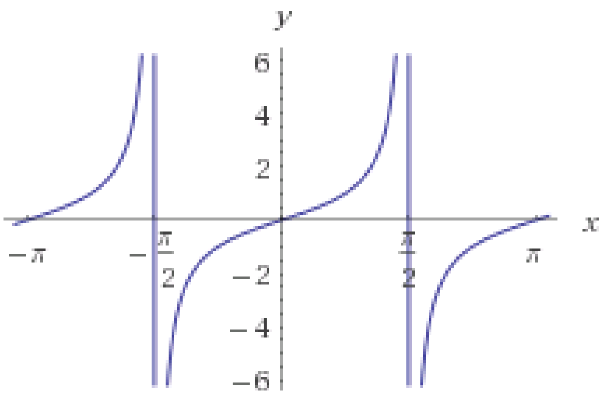
Função Tangente

A função tangente associa cada número real ao seu cosseno, ou seja, f(x)=tgx. A tangente varia de $-\infty$ a ∞, ou seja a imagem é □ . Há restrições para x, pois como a tangente é a razão entre seno e cosseno, logo onde o cosseno é 0 a tangente não existe, ou seja quando nos ângulos de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e seus arcos côngruos. Logo seu domínio

$D=\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ é

Ângulo (em radianos)	Tangente
0	0
$\frac{\pi}{2}$	∄
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	∄
2π	0

Dessa forma o gráfico, chamado tangentoide, fica:



A curva também pode ser estendida para valores menores que 0 e maiores que 2π. A função tangente é periódica e seu período é π.

A lei de formação geral da função é $f(x)=a+btg(cx+d)$.

Funções Trigonométricas Compostas

Sabemos que a função $f(x)=sen(x)$ tem período 2π. Então, qual seria o período da função $f(x)=sen(2x)$, por exemplo?

O fato de a abscissa estar multiplicada por 2 faz com que seja necessária uma variação duas vezes menor na variável para que a função complete seu ciclo. Portanto, o período dessa função é:

$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

De maneira geral, o período de uma função trigonométrica composta é calculado dividindo-se o período da função trigonométrica que a origina pelo módulo da constante que multiplica a variável x. Ou seja:

$$T = \frac{2\pi}{|c|}$$

Com relação à construção do gráfico de uma função trigonométrica composta, devemos entender a importância de cada constante que compõe a lei de formação dessa função.

$$f(x) = a + bsen(cx + d)$$

→ a: desloca a função para baixo ou para cima a unidades.

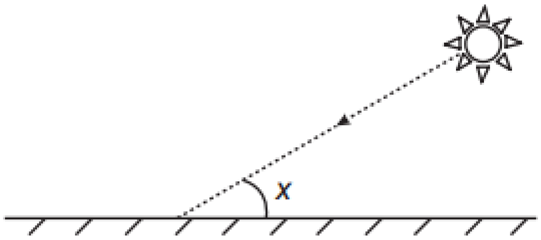
→ b: altera a amplitude da função; atenção no caso de b ser negativo, pois, além da mudança de amplitude, haverá, também, uma rotação em torno do eixo x.

→ c: altera o período da função.

→ d: desloca a função para a esquerda ou direita $\frac{d}{c}$ unidades.

Exercícios

1. Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo X com a sua superfície, conforme indica a figura.
Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por I(x) = k . sen(x)
sendo k uma constante, e supondo-se que X está entre 0° e 90º.



Quando x = 30º, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?
a) 33%
b) 50%
c) 57%
d) 70%
e) 86%

2. Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.
Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi
a) $P(t) = 99 + 21\,cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\,cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\,cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\,cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\,cos(t)$

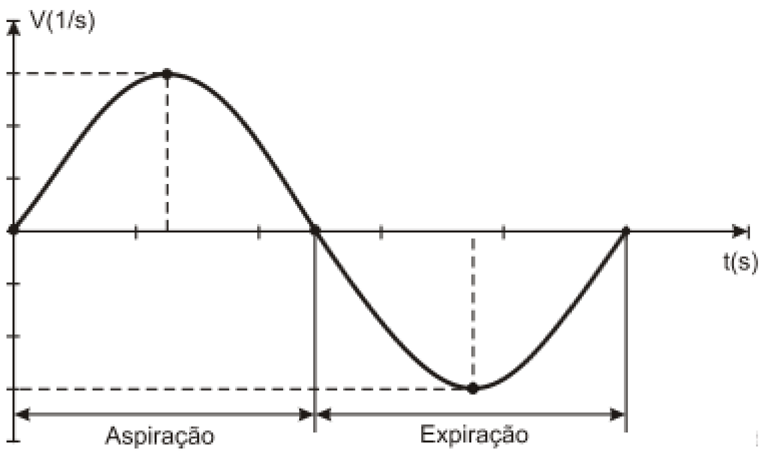
3. Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando *r* assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por:

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15.\cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12 765 km.
b) 12 000 km.
c) 11 730 km.
d) 10 965 km.
e) 5 865 km.

4. Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 l/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

a) $V(t) = \frac{2\pi}{5}\text{sen}\left(\frac{3}{5}t\right)$

b) $V(t) = \frac{3}{5}\text{sen}\left(\frac{5}{2\pi}t\right)$

c) $V(t) = 0{,}6\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$

d) V(t)= $0{,}6\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$

e) V(t)= $\dfrac{5}{2\pi}\cos(0{,}6t)$

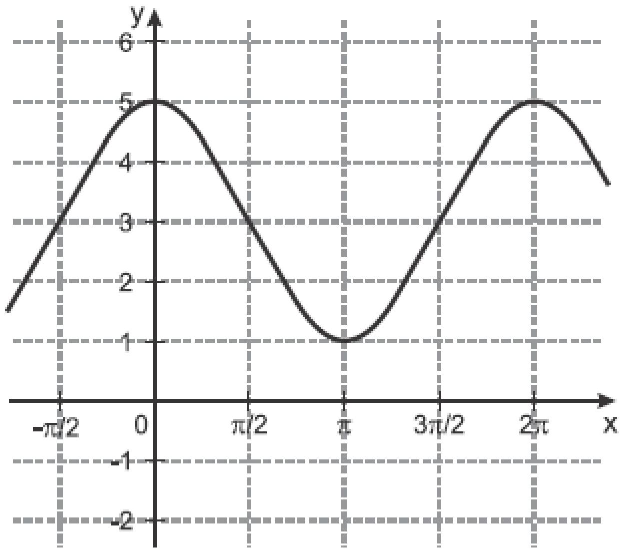
5. Em muitas cidades, os poluentes emitidos em excesso pelos veículos causam graves problemas a toda a população. Durante o inverno, a poluição demora mais para se dissipar na atmosfera, favorecendo o surgimento de doenças respiratórias. Suponha que a função:

$$N(x) = 180 - 54\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-1)\right)$$

represente o número de pessoas com doenças respiratórias registrado num Centro de Saúde, com $x = 1$ correspondendo ao mês de janeiro, $x = 2$, o mês de fevereiro e assim por diante. A soma do número de pessoas com doenças respiratórias registrado nos meses de janeiro, março, maio e julho é igual a:

a) 693.
b) 720.
c) 747.
d) 774.
e) 936.

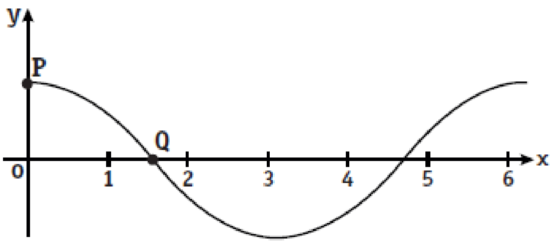
6. O esboço do gráfico da função f(x) = a + b cos (x) é mostrado na figura seguinte.



Nessa situação, o valor de a · b é:
a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 6.

7. Se f : □ → □ é a função definida por f(x) = $2^{senx} + 1$, então o produto do maior valor pelo menor valor que f assume é igual a:
a) 4,5.
b) 3,0.
c) 1,5.
d) 0.

8. Considerando o esboço do gráfico da função f(x) = cos x, entre 0 e 2π a reta que passa pelos pontos P e Q define com os eixos coordenados um triângulo de área:



a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) π

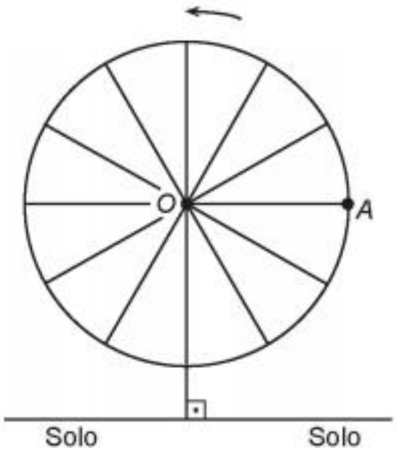
d) $\frac{\pi}{8}$

e) $\frac{\pi}{6}$

9. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,sen(12(h - 12))$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

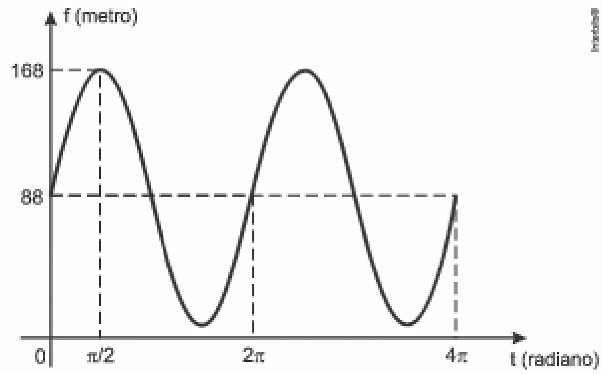
Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?
a) A = 18 e B = 8
b) A = 22 e B = -4
c) A = 22 e B = 4
d) A = 26 e B = -8
e) A = 26 e B = 8

10. Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento *OA* se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto *O*. Sejam *t* o ângulo determinado pelo segmento *OA* em relação à sua posição inicial, e *f* a função que descreve a altura do ponto *A*, em relação ao solo, em função de *t*. Após duas voltas completas, *f* tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

a) f(t) = 80sen(t) + 88
b) f(t) = 80cos(t) + 88
c) f(t) = 88cos(t) + 168
d) f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)
e) f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)

Gabarito

1. b
O valor máximo será quando x = 90º, então i = k.1= k
Quando x = 30º, teremos i=k.(½)= k/2
Logo, a variação será de 50%

2. a
Substituindo o cosseno de cada opção por 1 e -1, percebemos que as opções compatíveis com os valores de máximo e mínimos apresentados são letra a, c ou d. Como são 90 batimentos a cada 60 segundos temos, 2/3 de batimentos por segundo. Como o enunciado diz que o tempo entre dois valores máximos é o tempo de 1 batimento percebemos que o período deve ser igual a 2/3. Numa função trigonométrica p = 2 / |k|, por isso 2/3 = 2 / |k|, concluindo que k = 3.

3. b
1) $r_{máximo}$ = 5 865/[1 + 0,15.(-1)] = 5 865/(1 – 0,15) = 6 900
2) $r_{mínimo}$ = 5 865/[1 + 0,15.(1)] = 5 865/(1 + 0,15) = 5 100
S = $r_{máximo}$ + $r_{mínimo}$ = 6 900 + 5 100 = 12 000

4. d
O período da função é $\frac{|2\pi|}{5} = \frac{2\pi}{5}$
Como as taxas de inalação e exalação são 6, temos a função:
$$y = 0,6.sen(\frac{2\pi}{5}x)$$
A função não poderia ser $y = 0,6.\cos(\frac{2\pi}{5}x)$, pois, se x for zero, o y deveria ser 0,6.

5. b
Podemos ver neste caso que os meses solicitados tem algo em comum:
Meses: {1, 3, 5, 7}
Todos eles quando substituímos na forma de $cos(\frac{\pi}{6}(x-1))$

Obtemos algo em comum:
$$cos(\frac{\pi}{6}(1-1)) = cos(0) = 1$$
$$cos(\frac{\pi}{6}(3-1)) = cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$$
$$cos(\frac{\pi}{6}(5-1)) = cos(\frac{2\pi}{3}) = -0,5$$
$$cos(\frac{\pi}{6}(7-1)) = cos(\pi) = -1$$

Então veja que o mês de janeiro cancela com o mês de julho, sobrando somente o primeiro termo da equação. E com março e maio, acontece a mesma coisa.

Portanto a resposta é 4 x 180 = 720

6. d

Separando alguns pontos do gráfico, podemos formar um sistema:

$$(0,5) \Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow a + b\cos(0) = 5 \Leftrightarrow a + b = 5$$

$$(\pi,1) \Rightarrow f(\pi) = 1 \Rightarrow a + b\cos(\pi) = 1 \Leftrightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos a = 3 e b = 2. Portanto, a.b = 6.

7. b

Como sabemos, o menor valor do seno de qualquer ângulo é sempre -1, e o maior, 1.

$$f_{MÁX} = 2^1 + 1 = 3$$

$$f_{MÍN} = 2^{-1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Assim o produto é 3/2 x 3 = 3.

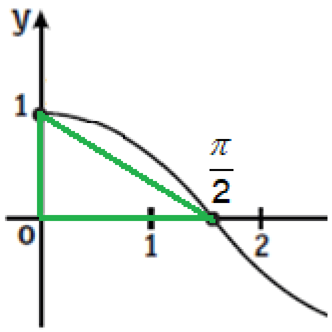
8. b

Primeiro, precisamos descobrir quais são os pontos P e Q. Repare que P é o ponto em que x = 0 e Q é o ponto em que y = 0.

$$(0,P) \Rightarrow f(0) = P \Rightarrow P = \cos(0) \Leftrightarrow P = 1$$

$$(Q,0) \Rightarrow f(Q) = 0 \Rightarrow 0 = \cos(Q) \Leftrightarrow Q = \frac{\pi}{2}$$

Agora, observe a figura:



Temos um triângulo de altura h = 1 e base b = π/2. Assim, a área será $\frac{b.h}{2} = \frac{1.\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

9. b.

Substituindo os valores na equação por 26°C pela manhã, às 6h e 18°C às 18h, tem-se:

$$T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$$

$$T(6) = 26 = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(6-12)\right) \to 26 = A + B\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to 26 = A - B$$

$$T(18) = 18 = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(18-12)\right) \to 18 = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \to 18 = A + B$$

$$\begin{cases} A - B = 26 \\ A + B = 18 \end{cases}$$

$$2A = 44 \to A = 22 \to B = -4$$

10. a.

Pelo gráfico, vemos que f é uma função seno, com período 2π, da forma $f(t) = A + B\text{sen}(t)$. Ademais, pelo ponto $f(0) = 88$, temos que $A = 88$ e, pelo ponto $f(\pi/2) = 168$, temos que $B = 80$. Por fim, temos que a $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$.