Vetores

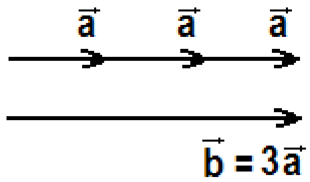
Resumo

Operações Vetoriais

- **Multiplicação de um escalar por um vetor**
  Supondo o vetor abaixo:

Direção: Horizontal
Sentido: Para direita
Módulo ou intensidade: a = 1 unidade de medida (u.m.)
[para simplificar vamos escrever o módulo do vetor apenas como a.]

Calculando o módulo do vetor b tal que b=3a (o vetor b é o resultado da multiplicação do número (escalar) 3 pelo vetor a).
Ex.:

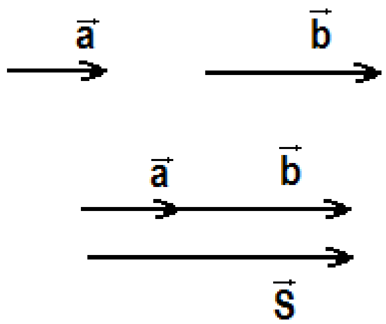


Portanto, pode-se concluir que o resultado do módulo de b vale 3 unidades.
Obs.: É importante notar que quando se multiplica um vetor por um número escalar, sua direção e sentido não são alterados, porém caso o escalar seja negativo, a direção do vetor permanece a mesma, mas seu sentido será invertido.

Adição de vetores:

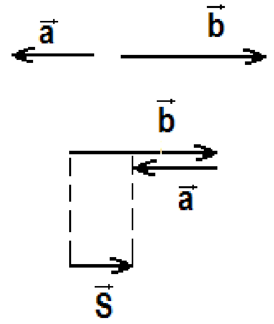
- **Mesma direção e sentido**

Neste caso é feita a soma algébrica dos vetores.



a = 1 u.m.
b = 2 u.m.
S = a + b = 3 u.m.

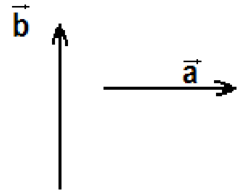
- **Mesma direção e sentidos opostos**



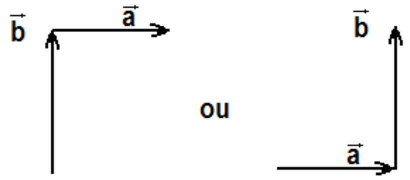
S = b – a = 1 u.m.
Obs.: Embora a conta seja uma conta de subtração o desenho é o vetor soma. Isto acontece porque a soma vetorial não representa uma soma escalar comum.

- **Direções perpendiculares**

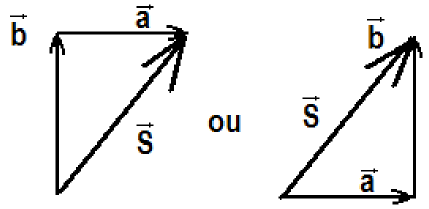
a = 3 u.m.
b = 4 u.m.



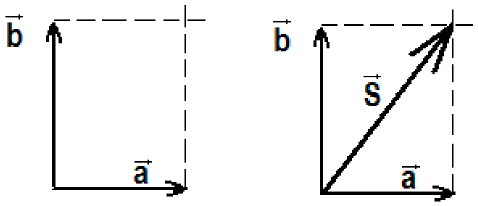
O vetor soma é dado pela junção dos vetores, sempre colocando a ponta do primeiro vetor junto do final do 2° vetor como na figura abaixo:



O vetor soma (S) será representado graficamente como uma seta que liga o final do 1° vetor ao início do 2° vetor.
Assim:

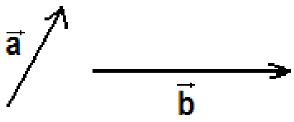


Isso é equivalente a fazer a regra do paralelogramo, onde se traçam retas paralelas aos vetores.

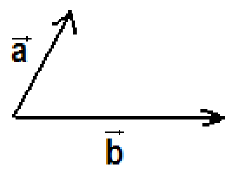


Para calcular o valor do vetor S (seu módulo) é preciso usar o Teorema de Pitágoras:
$S^2 = a^2 + b^2$ $S^2 = 9 + 16 = 25$ $S = 5$ u.m.

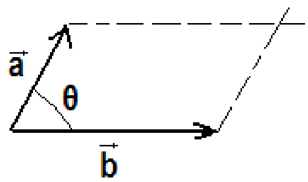
- **Direções quaisquer**



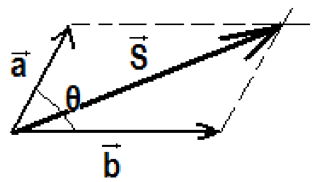
Diferentemente do caso anterior, agora é útil usar a Regra o Paralelogramo, uma vez que não é possível aplicar Pitágoras.
Sendo assim, os vetores devem ser colocados de tal forma que estejam unidos pela origem.



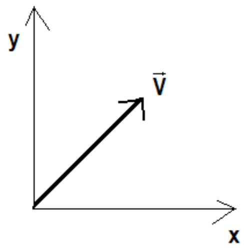
São traçadas retas paralelas aos vetores;



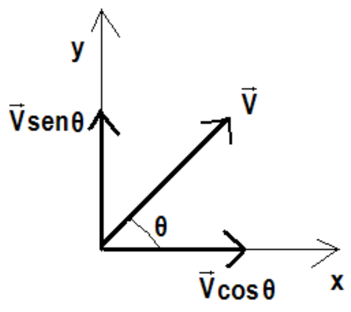
O vetor S será o vetor que tem como origem o encontro das origens dos demais vetores e como fim o encontro das retas paralelas aos vetores.



Desta forma é possível calcular o módulo de S utilizando a fórmula a seguir:
$S^2=a^2+b^2+2.\ a.b.\cos\theta$
Obs.: Decomposição Vetorial. Fazer a decomposição é projetar o vetor em suas componentes ortogonais (eixo x e y).

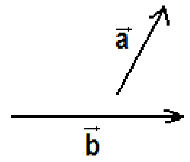


Usa-se o ângulo para escrever as componentes.

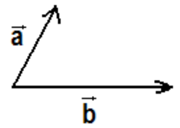


- **Subtração de vetores:**

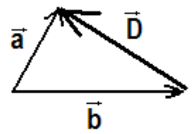
A subtração de vetores pode ser entendida como a soma de um vetor com seu sentido contrário.
a- b= a+(-b)
Agora, supondo um vetor D= a- b.



Unindo os vetores pela origem.



O desejado é o vetor D= a- b, este vetor pode-se ser representado como sendo um vetor que vai do final do vetor b ao final do vetor a.



Exercícios

1. O estudo da Física em duas e três dimensões requer o uso de uma ferramenta matemática conveniente e poderosa conhecida como vetor. Sobre os vetores, assinale o que for correto.

(01) A direção de um vetor é dada pelo ângulo que ele forma com um eixo de referência qualquer dado.

(02) O comprimento do segmento de reta orientado que representa o vetor é proporcional ao seu módulo.

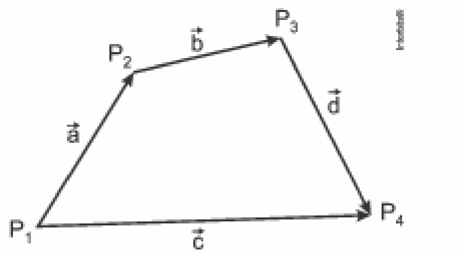
(04) Dois vetores são iguais somente se seus módulos correspondentes forem iguais.

(08) O módulo do vetor depende de sua direção e nunca é negativo.

(16) Suporte de um vetor é a reta sobre a qual ele atua.

Soma: (   )

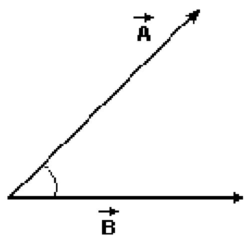
2.



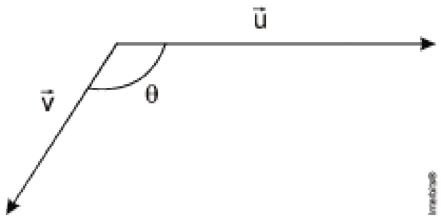
Uma partícula move-se do ponto P_1 ao P_4 em três deslocamentos vetoriais sucessivos, $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{d}$. Então o vetor de deslocamento $\vec{d}$ é

a) $\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
c) $(\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$
d) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
e) $\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}$

3. Os deslocamentos A e B da figura formam um ângulo de 60º e possuem módulos iguais a 8,0 cm. Calcule os módulos dos deslocamentos A + B, A – B e B – A e desenhe-os na figura.



4. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados a seguir, têm módulos, respectivamente, iguais a 8 e 4, e o ângulo Θ mede 120º.



Qual o módulo do vetor $\vec{u} - \vec{v}$?

a) $3\sqrt{7}$

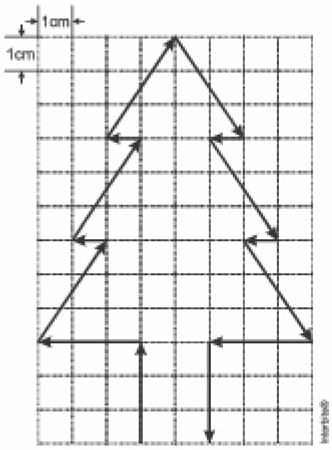
b) $4\sqrt{7}$

c) $5\sqrt{7}$

d) $3\sqrt{5}$

e) $4\sqrt{5}$

5. Considere a árvore de natal de vetores, montada conforme a figura a seguir.



A alternativa correta que apresenta o módulo, em cm, do vetor resultante é:

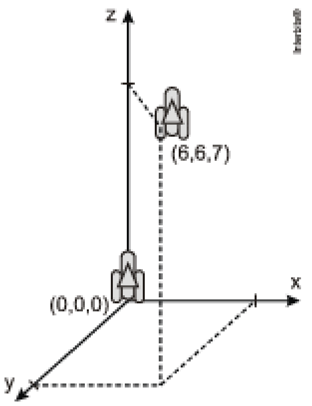
a) 4

b) 0

c) 2

d) 6

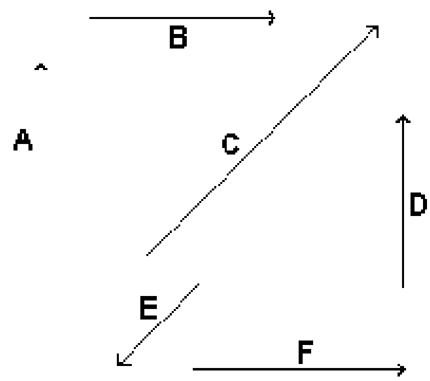
6. Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6,6,7) no espaço, conforme mostra figura. As distâncias são medidas em quilômetros.



Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z, então o foguete atingiu a posição.

a) (17, 3, 9)
b) (8, 3, 18)
c) (6, 18, 3)
d) (4, 9, -4)
e) (3, 8, 18)

7. Observe a figura a seguir e determine quais as flechas que:

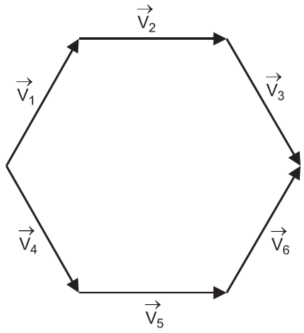


a) tem a mesma direção.
b) tem o mesmo sentido.
c) tem o mesmo comprimento.
d) são iguais.

8. Os ponteiros de hora e minuto de um relógio suíço têm, respectivamente, 1 cm e 2 cm. Supondo que cada ponteiro do relógio é um vetor que sai do centro do relógio e aponta na direção dos números na extremidade do relógio, determine o vetor resultante da soma dos dois vetores correspondentes aos ponteiros de hora e minuto quando o relógio marca 6 horas.

a) O vetor tem módulo 1 cm e aponta na direção do número 12 do relógio.
b) O vetor tem módulo 2 cm e aponta na direção do número 12 do relógio.
c) O vetor tem módulo 1 cm e aponta na direção do número 6 do relógio.
d) O vetor tem módulo 2 cm e aponta na direção do número 6 do relógio.
e) O vetor tem módulo 1,5 cm e aponta na direção do número 6 do relógio.

9. Com seis vetores de módulos iguais a 8u, construiu-se o hexágono regular abaixo.



O módulo do vetor resultante desses seis vetores é igual a:

a) 64u
b) 32u
c) 16u
d) 8u
e) zero

10. Um homem segue este itinerário: Parte de sua casa, percorre quatro quadras para leste, três quadras para o norte, três quadras para leste, seis quadras para o sul, três quadras para oeste, três quadras para o sul, três quadras para o oeste, três quadras para o sul, duas quadras para leste, duas quadras para o sul, oito quadras para oeste, seis quadras para o norte, e duas quadras para leste. A que distância e em que direção está ele de seu lar?

Gabarito

1. 01 + 02 + 04 + 16 = 23

Justificando, quando se julgar necessário:
[01] Correta. O comprimento do segmento de reta orientado que representa o vetor é proporcional ao seu módulo. A constante de proporcionalidade é dada pela escala adotada.
[02] Correta.
[04] Correta. Para que dois vetores sejam iguais é condição necessária que seus módulos sejam iguais, embora não seja suficiente. Eles devem ter também mesma direção e mesmo sentido.
[08] Incorreta. O módulo de um vetor não depende de sua direção, mas sim, da intensidade da grandeza física que ele representa.
[16] Correta. A direção de um vetor é a da reta que dá sua linha de ação.

2. **A**

Aqui temos uma soma vetorial em que para determinarmos o vetor resultante, utilizamos a regra do polígono da seguinte forma:

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{c}$

Logo, isolando o vetor $\vec{d}$ da equação, temos a resposta:

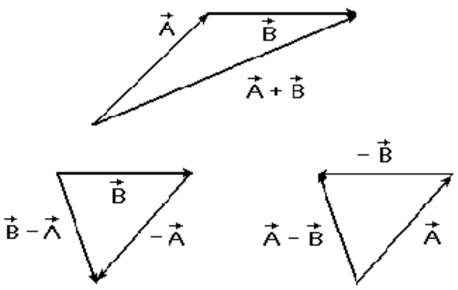
$\vec{d} = \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$

3.

$|A + B| = 8\sqrt{3}\,m$

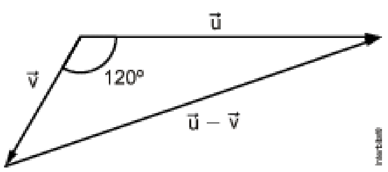
$|A - B| = |B - A| = 8\ m$

Observe a figura a seguir:



4. **B**

Considere a figura.



Pela Lei dos Cossenos, segue que

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 120°$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{112}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 4\sqrt{7}.$$

5. C

A questão é puramente uma questão de vetores. Para resolvê-la, basta utilizar a regra do polígono, que diz que o vetor soma de n vetores consecutivos é dada pela união entre o início do primeiro vetor com o final do último.
Assim, pela figura, o módulo do vetor soma é 2 cm.

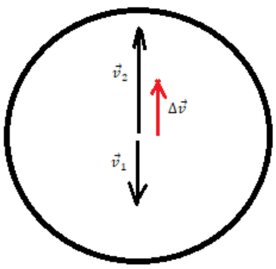
6. B

Supondo que "para trás" signifique um deslocamento no sentido negativo, e "para frente" corresponda a um deslocamento no sentido positivo de cada eixo, segue que a posição atingida pelo foguete é dada por $(6+2, 6-3, 7+11) = (8, 3, 18)$.

7.

a) A e D; B e F; C e E
b) A e D; B e F
c) B e D
d) Nenhum par.

8. A



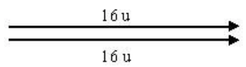
$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$

$2 - 1 = 1cm, direção\ vertical, para\ cima.$

9. B

Podemos primeiro somar $\vec{v}_1, \vec{v}_2\ e\ \vec{v}_3$ e depois $\vec{v}_4, \vec{v}_5\ e\ \vec{v}_6$

Por geometria vemos que essas duas somas resultam em dois vetores com módulo igual a 16u.



Dessa forma, o módulo do vetor resultante é igual a 16u + 16u = 32u.

10. Temos então:

4L + 3N + 3L + 6S + 3O + 3S + 3O + 3S + 2L + 2S + 8O + 6N + 2L = 11L + 9N + 14S + 14O

Como:

O = -L

S = -N

Temos que:

11L + 9N +14(-N) + 14(-L) = -3L -5N

Como estas direções são perpendiculares entre si a solução é dada pelo teorema de Pitágoras:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \cong 5,8\ quadras}$$