Circunferência

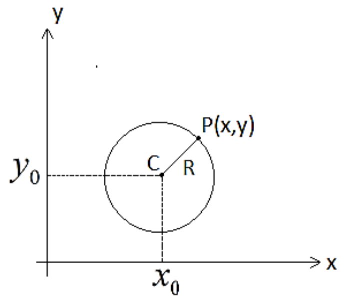
Resumo

Definição

Circunferência é o nome dado ao conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto fixo, que chamamos de centro.

Equação da circunferência

Uma circunferência γ de centro no ponto C(x_0,y_0) e raio de medida R é o conjunto dos pontos P(x,y), tais que P ∈ γ, $\overline{PC}$ = R.



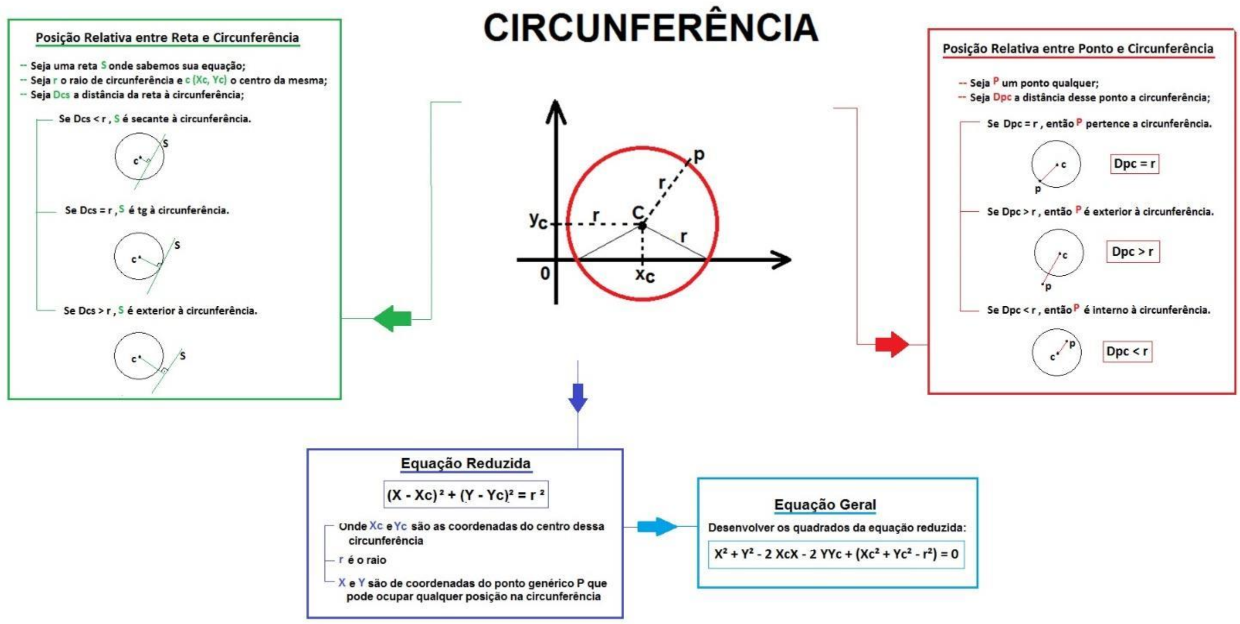
Substituindo $\overline{PC}$ por seu valor, de acordo com a fórmula da distância entre dois pontos tem-se:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Ao elevar ambos os lados ao quadrado, chegamos à equação da circunferência:

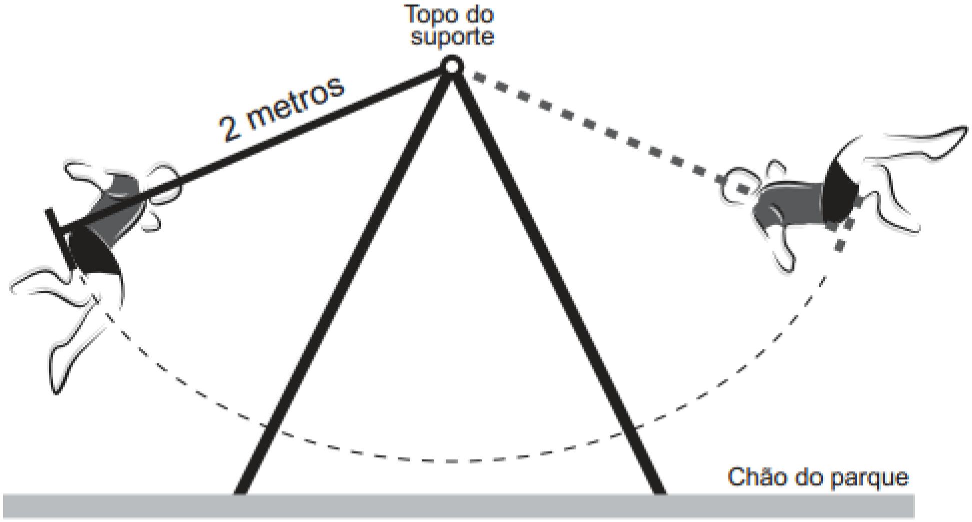
$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Obs.: Repare que, se o centro da circunferência for em (0, 0), teremos a equação $R^2 = x^2 + y^2$.



Exercícios

1. A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal. Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.



A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função.

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

c) $f(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

2. Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I – é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II – é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de – 1 a 1;

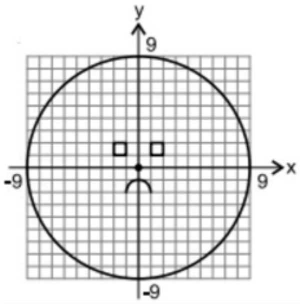
III – é o quadrado formado pelos vértices (– 2, 1), (– 1, 1), (– 1, 2) e (– 2, 2);

IV – é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2);

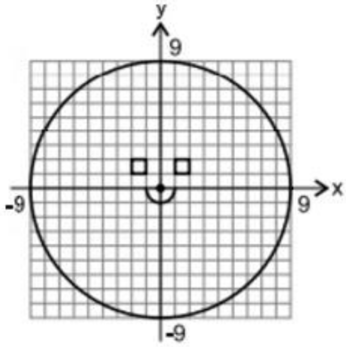
V – é o ponto (0, 0).

Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

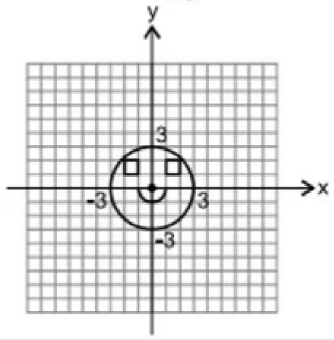
a)



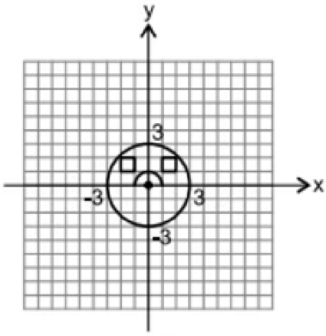
b)



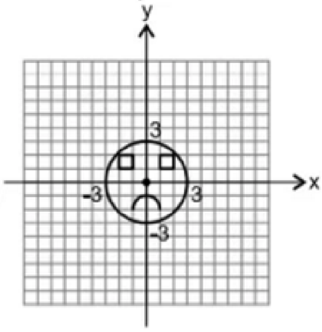
c)



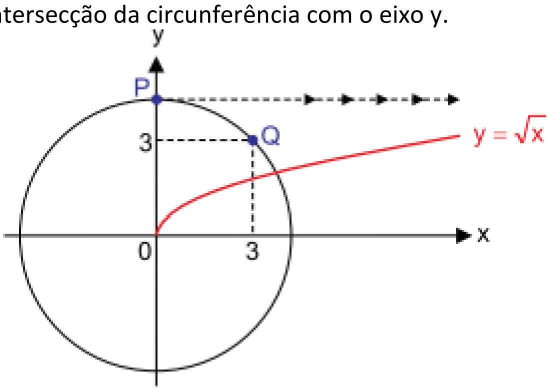
d)



e)



3. Os pontos P e Q(3, 3) pertencem a uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano. P também é ponto de intersecção da circunferência com o eixo y.



Considere o ponto R, do gráfico de $y = \sqrt{x}$, que possui ordenada y igual à do ponto P. A abscissa x de R é igual a:

a) 9.
b) 16.
c) 15.
d) 12.
e) 18.

4. Considere a circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = x - y$. Qual das equações a seguir representa uma reta que divide essa circunferência em duas partes iguais?

a) x+y=-1
b) x-y=-1
c) x-y=1
d) x+y=1

5. Se (p,q), são as coordenadas cartesianas do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0,$ então é correto afirmar que 5p-3q é igual a:

a) 7
b) 10
c) 13
d) 16
e) 19

6. Os pontos A(1,1), B(1,9) e C(7,1) são os vértices do triângulo inscrito numa circunferência de equação $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$ .O valor de m+2n+3p é igual a:

a) 29
b) 20
c) 65
d) 28

7. Duas pessoas patinam sobre o gelo descrevendo trajetórias circulares. As circunferências descritas por elas são dadas pelas equações $(x+3)^2+(y+1)^2=10$ e $(x+3)^2+y^2=13$, respectivamente. A distância entre os dois pontos de intersecção das circunferências é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

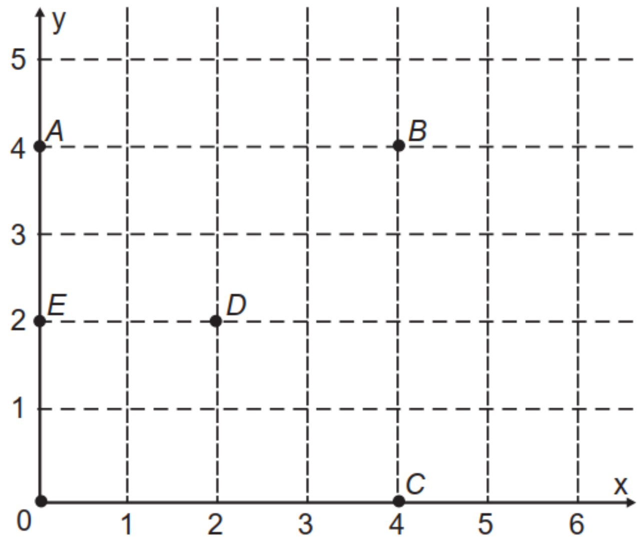
8. No plano cartesiano, a reta de equação 3x+4y=17 tangencia uma circunferência de centro no ponto (1,1)
A equação dessa circunferência é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

9. Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.
Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é:

a) 30
b) 40
c) 45
d) 60
e) 68

10. Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0 ; 4), 6(4 ; 4), C(4 ; 0), D(2 ; 2) e E(0; 2).



Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $x^2 + (y-2)^2 = 4$
e) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Gabarito

1. d

A trajetória descrita pelo assento do balanço é parte da circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Logo, sabendo que $y < 0$, temos $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, com $-2 < x < 2$.

2. e

A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ possui centro no ponto $(0, 0)$ e raio igual a 3.
A parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1, possui concavidade voltada para baixo e vértice no ponto $(0, -1)$.

Portanto, a única alternativa possível é a alternativa [E].

3. e

Calculando:

$$Q(3, 3) \rightarrow \text{raio} = 3\sqrt{2} \rightarrow P\left(0, 3\sqrt{2}\right)$$

$$R\left(x, 3\sqrt{2}\right) \rightarrow y = \sqrt{x} \rightarrow 3\sqrt{2} = \sqrt{x} \rightarrow x = 18$$

4. c

Calculando:

$$x^2 + y^2 = x - y \rightarrow \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$C\left(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right) \text{ e } R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A reta que divide a circunferência em duas partes iguais passa pelo centro C e pode ter equação igual a $x - y = 1$.

5. c

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

$$p = 2$$

$$q = -1$$

$$5p - 3q = 10 + 3 = 13$$

6. b

Representando os pontos no plano cartesiano tem-se um triângulo retângulo com ângulo reto em A. Todo triângulo retângulo pode ser inscrito numa circunferência de diâmetro igual à
hipotenusa. Pelo teorema de Pitágoras tem-se que a hipotenusa é igual a 10 e, portanto, o raio é igual a 5. O centro O da circunferência será o ponto médio do segmento BC. Assim, pode-se escrever:

$$O\left(\frac{1+7}{2}, \frac{9+1}{2}\right) \Rightarrow O(4, 5)$$

$$\text{Eq. circunferência} \Rightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} m = -8 \\ n = -10 \\ p = 16 \end{array} \right.$$

$$m + 2n + 3p = -8 - 20 + 48 = 20$$

7. d

Os pontos de intersecção entre as duas circunferências são solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y+1)^2 = 10 \quad \text{(i)} \\ (x+3)^2 + y^2 = 13 \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as equações (ii) e (i), temos:

$$(x+3)^2 + y^2 - (x+3)^2 - (y+1)^2 = 13 - 10$$
$$y^2 - y^2 - 2y - 1 = 3$$
$$2y = -4$$
$$y = -2$$

Substituindo $y = -2$ na equação (i),

$$(x+3)^2 + (-2+1)^2 = 10$$
$$(x+3)^2 = 9$$
$$x + 3 = 3 \therefore x = 0 \text{ ou } x + 3 = -3 \therefore x = -6$$

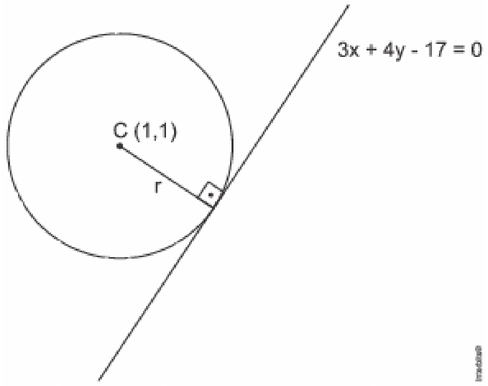
Assim, os pontos de intersecção entre as duas circunferências são $A(0,-2)$ e $B(-6,-2)$.

Logo,

$$d_{A,B} = \sqrt{(-6-0)^2 + (-2-(-2))^2}$$
$$d_{A,B} = \sqrt{36+0}$$
$$d_{A,B} = 6$$

8. b

Do enunciado, temos:



$$r = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 17|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$
$$r = \frac{|-10|}{\sqrt{25}}$$
$$r = \frac{10}{5}$$
$$r = 2$$

Assim, a equação da circunferência acima é:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

9. B

Sem perda de generalidade, tomemos $A=(0,0)$ e $B=(30,0)$. Ademais, se $P=(x,y)$ é a posição de um bombeiro qualquer, então

$$\begin{aligned} d(A,P)=2\cdot d(B,P) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-30)^2+y^2} \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2=4(x-30)^2+4y^2 \\ &\Leftrightarrow (x-40)^2+y^2=20^2. \end{aligned}$$

Portanto, um bombeiro qualquer deve estar sobre uma circunferência de centro em $(40,0)$ e raio $20\,m$.

A maior distância entre dois bombeiros ocorre quando ambos estão em extremidades distintas de um mesmo diâmetro, ou seja, $40\,m$.

10. E

Desde que $ABCO$ é um quadrado, e como uma reta passando por A pode atingir no máximo os pontos C e D, podemos concluir que a maior pontuação é obtida com a circunferência de centro em $D=(2,2)$ e raio $2\sqrt{2}$, ou seja, $(x-2)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8.$

Tal circunferência passa pelos pontos A, B e $C.$